関数１（関数の基本と比例・反比例）

2016 年 9 月 5 日

目次

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

  このテキストは、きちんと言葉を使ってていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとことひとこと言葉を大切にして、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの？」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

  数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。 つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

  数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

  紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違ったものには印を付けておきましょう。

  日頃から自分の実力をつかんでおくとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとつの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

  中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へぇ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

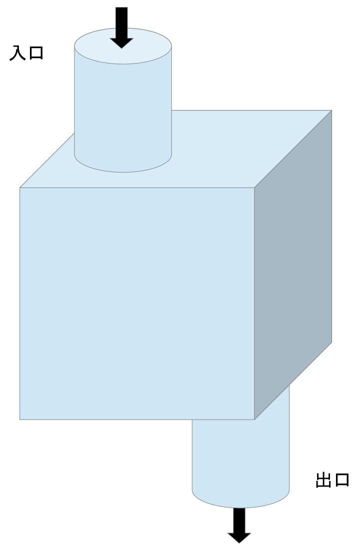
- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

関数についての一般的な話

この章では、そもそも関数っていったい何なのかということを学習します。関数を理解するための二つのキーワードである「変域」、「変化の割合」についても学びます。さらに、関数の性質を追求するときにとても役に立つ「グラフ」についても学びます。

1.1　関数っていったい何？



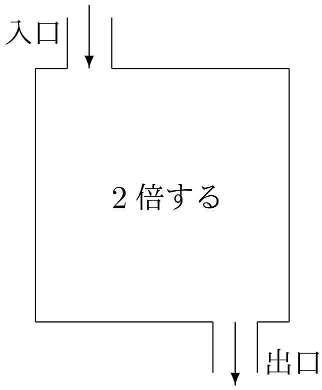
右の図を見てください。これは入り口と出口がついている箱です。

この箱の「入り口」にはあなたの好きな「数」を入れることができます。すると、ある「決まり」にしたがって「出口」からなにか「数」が出てくるようになっています。実は、この「決まり」のことを「関数」と呼んでいるのです。

「この説明ではよくわからなーい」と思う人がいるかもしれませんね。そこで、もう少し詳しく説明することにしましょう。さっきの説明には「決まり」という言葉が出てきました。ここで言っている「決まり」とは、例えば次のようなものです。

例 1　「決まり」: 入り口から入れた数を 2 倍して出口から出す

次の図を見てください。



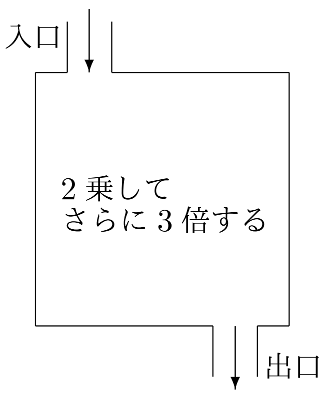
この「決まり」に従うと、「入り口」から「1」を入れると「出口」から「2」が出てきますよね。また「入り口」から「-3」を入れると「出口」から「-6」が出てきますよね。

問 1.　「入り口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」について考えることにします。この「決まり」に従うと、もし「入り口」から「$-\dfrac{7}{4}$」を入れたら、「出口」から出てくる数はいくつになると思いますか。　答えを見る

では、今度はさっきまでとは別の「決まり」について考えることにしましょう。

例 2　「決まり」: 入り口から入れた数を 2 乗してさらに 3 倍して出口から出す

次の図を見てください。



この「決まり」に従うと、例えば「入り口」から 5 を入れると、5 がまず 2 乗されて 25 になり、さらに 25 が 3 倍されて 75 となって「出口」から出てきます。

問 2.　「入り口から入れた数を 2 乗してさらに 3 倍して出口から出す」という「決まり」について考えることにします。この「決まり」に従うと、もし「入り口」から -3 を入れたら、「出口」から出てくる数はいくつになると思いますか。 答えを見る

ここまでの説明で、「関数」とはどんなもののことなのか、わかってもらえたでしょうか。

「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」とか、入口から入れた数を乗してから、さらに 3 倍して出口から出す」というような「決まり」のことを数学では、**関数**と呼んでいるのです。

私たちはここまで、言葉をきちんと使って、関数とはどんなものなのかということを学んできました。でも、「決まり」を言葉だけで書いているのは大変ですよね。数学では、言葉だけで書いていると大変だなぁ」と思うときに、文字や式を使います。今あなたが学習している「関数」では、よく次のようなやり方で、文字や式を使います。

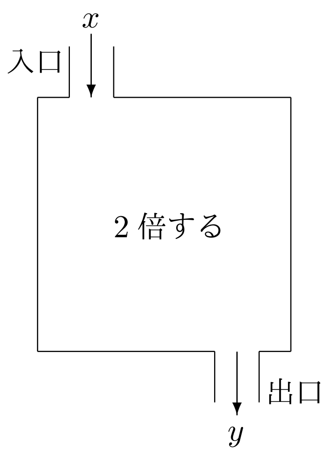
(1) 入口から入れる数は x という文字で表す。

(2) 出口から出てくる数は y という文字で表す。

(3) 「決まり」は、文字 x と文字 y が入っている「等式」で表す。

どういうことかわかりますか？まだ「良くわからなーい」と思っている人もいるかもしれませんね。そこで、例を使って、もっと詳しく説明しましょう。

例 3　「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」のことを考えることにします。



右の図を見てください。これは、「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」を図にしたものです。この例のすぐ前で言ったように、入口から入れる数は x という文字で表すことにしましょう。どうして文字を使うかというと、「入口から入れる数」といっても色々な数が考えられるからです。「入口から入れる数」は 5 になることもできますし、-3 になることもできますし、3.62 になることもできますし、$-\dfrac{7}{3}$ になることもできます。もちろんこのほかにも、色々な数になることができます。このように色々な数になることができるとき、数学では文字を使うのでしたね。ですから「入口から入れる数」を表すことにした x という文字は、色々な数の代わりとして使われるのです。

では、入口から x という数を入れると、どうなるのか考えることにしましょう。もう 1 度、箱の描いてある図を見てください。

「2 倍する」という「決まり」なのですから、入口から x を入れればそれが 2 倍されて $2x$ になりますよね。ですから、出口から $2x$ が出てくるのです。ところでこの例のすぐ前で言ったように,「出口から出てくる数」を表すために y という文字を使うことにしてありましたね。いま、出口から $2x$ が出てくるわけですから、y というのは $2x$ のことですね。このように考えると、

$$y = 2x$$

という等式を書いておけば、「決まり」を数式で伝えることができます。つまり「関数 $y = 2x$」と書いてあったら、「入口から入れた数を 2 倍して出口から出すという決まりがあるんだよ」といっているのです。

問 3. 以下の文はどれも、関数を表す「決まり」を言葉で書いたものです。このような、言葉で書かれている「決まり」を数式で表してください。

(1) 入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひいた数を出口から出す。

(2) 入口から入れた数を $-\dfrac{1}{2}$ 倍してさらに $\dfrac{3}{2}$ をたした数を出口から出す。

(3) 入口から入れた数を 2 乗してさらに -1 倍した数を出口から出す。

(4) 入口から入れた数を 2 乗してさらに $\dfrac{1}{3}$ をかけた数を出口から出す。

答えを見る

問 4. 以下の文はどれも、関数を表す「決まり」を数式で書いたものです。このような、数式で書かれている「決まり」を言葉を使って文で表してください。

(1) $y = -4x - 1$

(2) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$

(3) $y = \dfrac{1}{4}x^2$

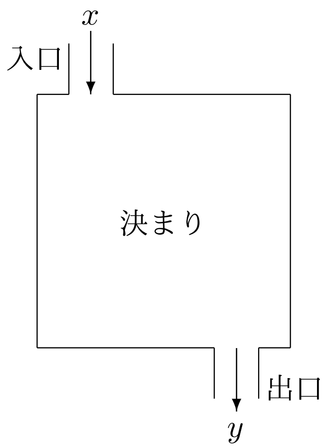
(4) $y = -3x^2$

答えを見る

1.2　関数の変域

これから、関数のことを考えるときにとても大切な 3 つのものについて学びます。それは、「変域」、「変化の割合」、「グラフ」と呼ばれています。ここでは、この 3 つのうち、まず「変域」と呼ばれているものについて学習しましょう。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでした。ところで、入口から入れる数を色々と変えていくと、出口から出てくる数もきっと色々と変わってくることでしょう。



問 5. $y = 2x - 1$ という数式で表されている関数について考えることにします。

入口から、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$、$x = 3$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

答えを見る

問 6. $y = 2x^2$ という数式で表されている関数について考えることにします。

入口から、$x = -4$、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

答えを見る

問 7. $y = 2x - 3$ という数式で表されている関数について考えることにします。

(1) 入口から、$x = -4$、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

(2) 今度は (1) とは違い 0.5 きざみで、入口から、$x = -4$、$x = -3.5$、$x = -3$、$x = -2.5$、$x = -2$、$x = -1.5$、$x = -1$、$x = 0.5$、$x = 0$、$x = 0.5$、$x = 1$、$x = 1.5$、$x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y													

(3) (1) と (2) の問題はどちらも、$y = 2x - 3$ という関数で、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下にしていますが、 (1) では 1 きざみ、(2) では 0.5 きざみで入り口から入れる数を変えて調べました。つまり、(2) の調査は (1) の調査に比べると細かい調査ですね。そこでもし、1 きざみとか 0.5 きざみなんてケチなことはやめて、x の値を 0.1 きざみで変えていくとか、さらに 0.01 きざみで変えていくとか、さらにがんばって 0.001 きざみで変えていったりしてもっと徹底的に細かく調査をしたら、どんな表ができるか想像してください。想像できたら次の質問に答え

てください。

質問：関数 $y = 2x - 3$ で、もし、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下の「ありとあらゆる」全ての数にすると、出口から出てくる y という数は、どんな数たちになりますか。

答えを見る

さて、今解いてもらった、問 7 の (3) はとても重要な問題です。「関数の変域」というものをこれからあなたに説明するのですが、問 7 の (3) がちゃんとわかっていないと、説明しても理解できないかも知れません。そこで「関数の変域」というものを説明する前に、次の例で、問 7 の (3) の答えを詳しく説明することにしましょう。

例 4　問 7 の (3) の答えについて

問 7 は、関数 $y = 2x - 3$ について考える問題でしたね。問 7 の (1) では入口から入れる数 x の値を 1 きざみで変えて、出口から出てくる数 y がいくつになるか調べていました。ちゃんと計算した人は、次のようになったはずです。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1

次に問 7 の (2) では、入口から入れる数 x の値を 0.5 きざみで変えて、出口から出てくる数 y がいくつになるか調べていました。つまり、細かい調査をしたわけです。ちゃんと計算した人は、次のようになったはずです。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

きざみをどんどん細かくして調べると、どんなことが新しくわかるのでしょうか。このことを考えるために、例えばこの 2 つの表で、x が -4 から x が -3 へ変わる所だけ詳しく比べてみることにしましょう。

右の 2 つの表を見てください。

上の表は、「入口から入れる x を 1 きざみに変えた場合に出口から出てくる y を調べた表」から、「x が -4 から -3 へ変わる所だけ」を取り出したものです。

x	-4	-3
y	-11	-9

下の表は、「入口から入れる x を 0.5 きざみで変えた場合に出口から出てくる y を調べた表」から、「x が -4 から -3 へ変わる所だけ」を取り出したものです。

x	-4	-3.5	-3
y	-11	-10	-9

もちろん、どちらの表も $y = 2x - 3$ という式を使って y を計算したものです。ではここで、2 つの表を見ながら、例えば、「出口から出てくる y が -10 になることがあるのかどうか」考えてみましょう。

上の表は x を 1 きざみで変えて調べたもので、「x が -4 のときに y は -11 になる」ということと、「x が -3 のときに y は -9 になるということ」が調べられています。つまり、1 きざみの調査では、「y は -11 になることがある」ということと、「y は -9 になることがある」ということがわかるわけです。しかしこの調査では、「y が -10 になること」があるのかないのかわからないのです。念のためもう 1 度、少し言い方を変えて説明しましょう。-10 というのは、-11 と -9 の間にある数です。1 きざみの調査の表の下の段（つまり y の段）を見れば、y が -11 や -9 になることがあるのはわかります。しかし、いくらこの表の y の段をを見ても、-10 という数はどこにも書いてないので「出口から出てくる y が -11 と -9 の間にある -10 という数になれるのかどうかはわからない」のです。

下の表は x を 0.5 きざみで変えて調べたものです。「x が -4 のときに y は -11 になる」ということと、「x が -3 のときに y は -9 になる」ということはもちろん調べられています。しかしそれだけではなくて、「x が -3.5 のときに y は -10 になる」ということも調べられています。つまり、きざみを 0.5 きざみに変え細かい調査をしてみたら、「出口から出てくる y が、-11 と -9 の間にある -10 という数になることがあるということがわかった」のです。

それでは、入り口から入れる x の値のきざみをもっと細かくして関数 $y=2x-3$ を調査するとどんなことがわかるのでしょうか。そこで今度は、入口から入れる x を 0.1 きざみで変えて調査することにしましょう。0.1 きざみですから全部調べるのは大変です。そこでとりあえず、さっきの表と比べるために x が -4 から -3 へ変わる所を 0.1 きざみで調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。（電卓などを使っても良いからあなたも自分で計算してたしかめてください。）

x	-4	-3.9	-3.8	-3.7	-3.6	-3.5	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3
y	-11	-10.8	-10.6	-10.4	-10.2	-10	-9.8	-9.6	-9.4	-9.2	-9

思い出してください。x を 1 きざみで変えて調べた時は、「y は -11 になれる」ということと、「y は -9 になれる」ということはわかりましたが、「y は -11 と -9 の間にあるほかの数になれるかどうか」ということはわかりませんでした。次に x を 0.5 きざみで変えて調べた時は、「y は -11 になれる」ということと、「y は -9 になれる」ということだけではなく、さらに、「y は -11 と -9 の間にある -10 という数になれる」ということもわかりました。しかし、-11 と -9 の間には、-10 のほかにもたくさんの数があります。0.5 きざみの調査では、y が、このような「ほかにもある数」になれるのかどうかわかりません。ですが、今、もっと細かい調査、つまり 0.1 きざみの調査をして表を作りましたね。それでは、今作った表の y の段を見てください。これを見ると、「y は -11 や -9 や -10 だけではなく、-10.8 とか、-10.6 とか、-10.4 とか、-10.2 とか、-9.8 とか、-9.6 とか、-9.4 とか、-9.2 になれる」ことがわかります。つまり、-11 と -9 の間にある、「けっこう色々な数」になれることがわかります。しかし 0.1 きざみの調査では、これが限界です。-11 と -9 の間には、さらにたくさんの「ほかの数」があるのです。例えば、-10.1 とか -9.45 とか -9.2431 とか $\cdots$ いくらでもあるのです。y がこのような数になれるのかどうか、0.1 きざみの調査ではわからないのです。

というわけで、さらにきざみを細かくして、入り口から入れる x の値を 0.01 きざみで変えて調べて表を作るとか、0.001 きざみで調べて表を作るとか、0.0001 きざみで調べて表を作るというようにしていくとどうなるのか想像してほしいのです。

実は徹底的に細かい調査をしていくと、x が -4 から -3 へ変わっていく所では、「y は -11 と -9 の間にあるどんな数にもなれる」ということがわかってきます。つまり、「入口から -4 以上 -3 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -11 以上 -9 以下のありとあらゆる数が出てくる」ということがわかってくるのです。

このようにして、きざみをどんどん細かくした調査のことを想像していけば、$y = 2x - 3$ という式で表される関数では、入口から -4 以上 2 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -11 以上 1 以下のありとあらゆる数が出てくるということが想像できるでしょう。

ではこれからいよいよ、「関数の変域」という言葉をあなたに教えます。問 7 の (3) や、例 4 では、「関数 $y = 2x - 3$ では、入口から入れる x として、-4 以上 2 以下のありとあらゆる数を使うと、出口から出てくる y は、-11 以上 1 以下のありとあらゆる数になる」ということを詳しく学習しましたね。数学では、「入口から入れる x という数の範囲」のことを **x の変域**と呼んでいます。また、「出口から出てくる y という数の範囲」のことを **y の変域**と呼んでいます。ですから、さっきの話では、「x の変域は -4 以上 2 以下（のありとあらゆる数）」ですし、「y の変域は -11 以上 1 以下（のありとあらゆる数）」ということです。数学っぽく書きたいときは、あなたも知っている不等号というものを使って、「x の変域は $-4 \leqq x \leqq 2$」、「y の変域は $-11 \leqq y \leqq 1$」と書けばよいのです。つまり、関数の話をしているときに、「x の変域は -4 以上 2 以下」と書いてあったら、「入口から -4 以上 2 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」と言っているのです。そして、「y の変域は -11 以上 1 以下」と書いてあったら、「出口から -11 以上 1 以下のありとあらゆる数が出てくるぞ」と言っているのです。

例題 1　$y = -2x + 5$ という式で表される関数について考えます。x の変域が $-3 \leqq x \leqq 5$ のとき、y の変域がどうなるのか調べなさい。

解答

まず、念のため、この問題の意味を確認しておきましょう。関数を表す式が $y = -2x + 5$ ですから、この関数は「入口から入れた x という数を -2 倍してさらに 5 をたして出口

から出す」という「決まり」ですね。また、x の変域が $-3 \leqq x \leqq 5$ ですから、「入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」といっているのですね。このとき y の変域、つまり「出口から出てくる数の範囲」を調べてくれというのがこの問題です。そこで、出口から出てくる y という数はどんな数になれるのか表を作って調べることにしましょう。次の表を見てください。これは入口から入れる x を -3 から 5 まで、1 きざみで変えて調べたものです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5

では、この表の y の段を見てみましょう。y は 11 や 9 や 7 や 5 や 3 や 1 や -1 や -3 や -5 になっています。どうも、一番小さくても -5 で、一番大きくても 11 のようです。しかしこの調査で安心してはいけませんね。この調査は 1 きざみです。きっと、もっと詳しく調べたほうが良いですよね。そこで、0.5 きざみで調べて表を作ってみます。そうすると、次のような表ができるはずです。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

では、y の段を見てみましょう。さっきより細かいことがわかります。x の値を 1 きざみで変えて調べたの表では、y が 10 とか 8 とか 6 などになるのかどうかわからなかったのですが、x を 0.5 きざみで変えて調べたこの表を見ると、y が 10 とか 8 とか 6 などになるのがはっきりとわかります。

では、もっともっと細かいきざみで調査するとどうなるのか想像してください。どうですか？ 11 と -5 の間にある、ありとあらゆる数が出口から出てくるって想像できますか。例えば、さっき作った 2 つの表では y が 8.5 になれるのかどうかわかりませんが、入り口から入れる x の値をもっと細かいきざみで変えて詳しく調べれば、y は 8.5 にだってなれるということがわかるのです。例えば、入口から入れる x を 0.01 きざみで変えて調べた人は、x を -1.75 にすると y が 8.5 になるって気づいたはずです。-1.75 は -3 以上 5 以下の数です。ですからこの問題では、-1.75 は入口から入れることができます。そうす

ると、出口からちゃんと 8.5 が出てくるのです。計算して確かめてくださいね。どうですか？このように、一生懸命細かい調査のことを想像してみれば、入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -5 以上 11 以下のありとあらゆる数が出てくるということが悟れるでしょう。というわけで、この問題の答えは

$$y \text{ の変域は } -5 \leqq y \leqq 11$$

ということになります。

例題 2　$y = x^2$ という式で表される関数について考えます。x の変域が $-3 \leqq x \leqq 5$ のとき、y の変域がどうなるのか調べなさい。

解答

まず、念のため、この問題の意味を確認しておきましょう。関数を表す式が $y = x^2$ ですから、「入口から入れた x という数を 2 乗して出口から出す」という「決まり」ですね。また、x の変域が $-3 \leqq x \leqq 5$ ですから、「入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」といっているのですね。このとき y の変域、つまり「出口から出てくる数の範囲」を調べてくれというのが、この問題です。そこで、出口から出てくる y という数はどんな数になれるのか、表を作って調べることにしましょう。次の表を見てください。これは入口から入れる x を -3 から 5 まで、1 きざみで変えて調べたものです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25

では、この表の y の段を見てみましょう。y は 9 や 4 や 1 や 0 や 1 や 4 や 9 や 16 や 25 になっています。ちょっと複雑なことが起きている感じがしますねぇ。9 とか 4 とか 1 は 2 回も出口から出てきていますね。まあそういうことはあっても、出口から出るのは、一番小さくても 0 で、一番大きくても 25 のようです。しかし、この調査で安心してはいけませんね。この調査は 1 きざみです。。きっと、もっと詳しく調べたほうが良いですよね。そこで、0.5 きざみで調べて表を作ってみます。そうすると、次のような表ができます（電卓などを使っても良いからあなたも自分で計算してたしかめてください。）

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	20.25	25

では、y の段を見てみましょう。さっきより細かいことがわかります。例えば、さっきの表では、y が 9 と 4 の間の数にになるのかどうかわかりませんよね。ですがこの表を見ると、y は 6.25 になるので、9 と 4 の間の数にになることもあるようです。また、y が 4 と 1 の間の数になることもあるようです。

では、x の値を 1 きざみや 0.5 きざみではなく、もっともっと細かいきざみで変えて調査するとどうなるのか想像してください。どうですか？ y の段ですが、左から右へ見ていくと、どうも、9 から始まって、少しずつだんだん減っていき、そのうち 0 になり、その先は少しずつだんだん増えて、最後に 25 になるようですね。一方的に増えたり減ったりするわけではありませんが、とにかく、0 と 25 の間にある、ありとあらゆる数が出てくるって想像できますね。このように、一生懸命、細かい調査のことを想像してみれば、入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から 0 以上 25 以下のありとあらゆる数が出てくるということが悟れるでしょう。ですから、この問題の答えは、

$$y \text{ の変域は } 0 \leqq y \leqq 25$$

ということになります。

大切な注意

この問題の解説の最後に、あなたに大切な注意をしておきます。よく、こういう「変域」の問題を解くとき、「はじっこの x の値」だけを使って計算し答えを出そうとする人がいます。どういうことかというと、「x の変域は $-3 \leqq y \leqq 5$ であるというのを見た瞬間、$y = x^2$ という式を使って

入口から $x = -3$ を入れると出口から $y = 9$ が出てくる。

入口から $x = 5$ を入れると出口から $y = 25$ が出てくる。

ということを計算し、

だから y の変域は $9 \leqq y \leqq 25$ となる。

と考える人がよくいます。でも、この考え間違ってますよね。はじっこの x の値である -3 と 5 だけを使って調査をしてもだめですよね。-3 と 5 の間にある数のことも調査しないと本当のことはわからないのです。だってこの問題では、例えば入口から 0 だって入れることができるのですよね。だったら出口から 0 が出てきますよね。また例えば入口から 2 だって入れることができるのですよね。だったら出口から 4 が出てきますよね。9 から 25 までしか出てこないなんてうそですよね。

問 8. 以下の関数で x の変域が以下のようになっているとき、y の変域を必ず表を作って調べなさい。

(1) 関数 $y = -3x + 2$ で x の変域が $1 \leqq x \leqq 5$ のときの y の変域

(2) 関数 $y = 2x - 7$ で x の変域が $-3 \leqq x \leqq 1$ のときの y の変域

(3) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $1 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域

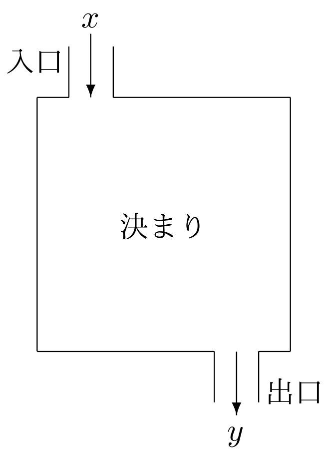
(4) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域

(5) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $-4 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域

答えを見る

1.3　関数の変化の割合

関数のことを考えるときにとても大切な、3 つのものがあるのでしたね。それらは、「変域」、「変化の割合」、「グラフ」と呼ばれているのでした。前の節では、この 3 つのうち、「変域」と呼ばれているものについて学習しました。ここではこれから、「変化の割合」と呼ばれているものを学習することにします。



右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ出口から出てくるのでした。

そして前の節では、「入口から入れる数 x を -5 以上 3 以下のありとあらゆる数にする」というようなことを考え、そんなことをすると「出口から出てくる数 y はどんな範囲の数になるのか」ということを気にしたのでした。

これから少し違うことを考えます。入口から入れる x を変えてみることに変わりはないのですが、次のような点が違います。

(1) 入口から入れる x は 2 個だけにします。そして、どっちの数を先に入れたのか覚えておきます。つまり、初めにいくつを入れて、次にいくつを入れたのか、ちゃんと順番も覚えておきます。

(2) (1) のようにすると、入口から入れる x は 2 個だけですから、出口から出てくる y は 2 個だけになります。ところで、(1) では入り口から入れる順番を気にしていてのですから、出口から出てくる数も順番が大切です。つまり、初めに入れた x に対応して出てくる y と、あとから入れた x に対応して出てくる y を取り違えてはいけません。どっちが先に出てきて、どっちがあとに出てきてのか覚えておくのです。

(3) 後から入れた x は初めに入れた x と比べると、どれだけ増えているのか計算しておきます。つまり、後から入れた x と先に入れた x の差を求めるておくのです。

(4) 後から出てきた y は初めに出てきた y と比べると、どれだけ増えているのか計算しておきます。つまり、後から出てきた y と先に出てきた y の差を求めておくのです。

どうですか？どんなことに注目しておくのかわかりましたか？少し話がごちゃごちゃしてきたので例を使って説明しましょう。

例 5　「入口から入れた数を 2 倍してさらに 1 をひく」という「決まり」の関数について

考えることにします。数式では、$y = 2x - 1$ ですよね。この関数で、入口から、初め 3 を入れ、次に 7 を入れる場合の話をします。そして、この例の前に説明した (1) から (4) は、どんなふうになるのか説明します。

(1) 初め入口から $x = 3$ を入れ、次に入口から $x = 7$ を入れるのでしたね。(3 と 7 を入口から入れるわけですが、どっちを先にいれ、どっちをあとに入れたのかちゃんと覚えていてくださいね。) 今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	3	7
y		

(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、$y = 2x - 1$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = 3$ を入れるのですから、$y = 2x - 1$ という数式を使って計算してみると、初めに出てくる y は、

$$2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

ですね。

次は、入口から $x = 7$ を入れるのですから、$y = 2x - 1$ という数式を使って計算してみると、次に出てくる y は、

$$2 \times 7 - 1 = 14 - 1 = 13$$

ですね。

つまり、先に 5 が出てきて、後に 13 が出てくるわけです。今、考えたことを、(1)

で作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	3	7
y	5	13

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3)　先に入れた x は 3 でした。あとから入れた x は 7 でした。ということは、後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているかというと、4 増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$7 - 3 = 4$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

4 増えている

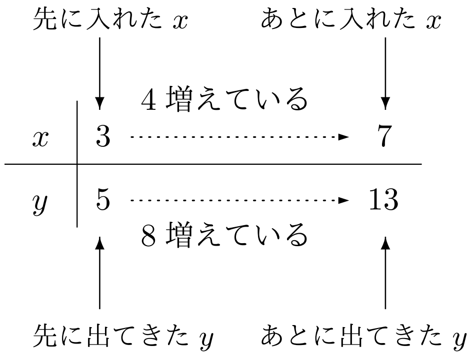
x	3	7
y	5	13

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4)　先に出てきた y は 5 でした。あとから出てきた y は 13 でした。ということは、後から出てきた y は先に出てきた y よりどれだけ増えているかというと、8 増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$13 - 5 = 8$$

増えているということがわかるわけですね。これも最後に表に追加して書いておきましょう。すると次のような表が完成します。

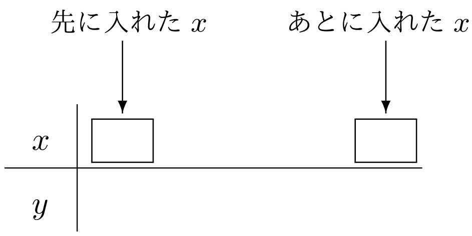


(1) から (4) まで調べたことを、このような表を作ってまとめておくと便利なのです。

問 9. 以下の文の空欄や表の空欄に正しい数を記入しなさい。

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、$y = 3x - 5$ ですよね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をします。そして、「x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

(1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。



(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、$y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

初めに出てくる y は $\boxed{\quad\quad}$

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

次に出てくる y は $\boxed{\quad\quad}$

ですね。つまり、先に $\boxed{\quad\quad}$ が出てきて、後に $\boxed{\quad\quad}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	-2	4
y	$\boxed{\quad\quad}$	$\boxed{\quad\quad}$

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{\quad\quad} - \left(\boxed{\quad\quad} \right) = \boxed{\quad\quad}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

$\boxed{\quad}$ 増えている

x	-2	4
y	-11	7

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{\quad} - \left(\boxed{\quad\quad} \right) = \boxed{\quad\quad}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

先に入れた x → -2　　あとに入れた x → 4

6 増えている

x	-2	4
y	-11	7

$\boxed{\quad}$ 増えている

先に出てきた y → -11　　あとに出てきた y → 7

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

$$x \text{ は } \boxed{\quad} \text{ 増え、} y \text{ は } \boxed{\quad\quad} \text{ 増える}$$

ということがわかりました。　答えを見る

問 10. 次の関数で、x の値を次のように変えたとき、「x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べて答えなさい。

(1) 関数 $y = 2x + 5$ で、x を -1 から 5 へ変える（入口から先に $x = -1$ を入れ、後に $x = 5$ を入れるという意味ですよ）

(2) 関数 $y = -3x + 2$ で、x を -5 から -2 へ変える（入口から先に $x = -5$ を入れ、後に $x = -2$ を入れるという意味ですよ）

(3) 関数 $y = x^2$ で、x を 1 から -4 へ変える（入口から先に $x = 1$ を入れ、後に $x = -4$ を入れるという意味ですよ）

(4) 関数 $y = x^2$ で、x を 4 から 1 へ変える（入口から先に $x = 4$ を入れ、後に $x = 1$ を入れるという意味ですよ）　答えを見る

では、話を進めましょう。

これまで、「x を 1 から 4 へ変える」とか「x を 7 から 1 へ変える」というように、入口から入れる x をある数から別の数へ変えるということを考えてきました。これからもそういうことを考えるのですが、ここで言葉を統一することにしましょう。どういうことかというと $\cdots$

例えば、「x を 1 から 4 へ変える」場合には、x は 3 増やされています。

これに対して例えば、「x を 7 から 1 へ変える」場合には、x は 6 減らされています。

このように、x は増えることもあれば減ることもあるわけです。そこでこれからは、x が減る場合は負の数を使って「増える」という言葉に統一することにしましょう。例えば、x は 6 減らされたと言う代わりに、負の数を使って x は -6 増やされたと言うことにするのです。そうすると、プラスの数を使うときは x は増えていることを意味しますし、マイナスの数を使うときは x は減っていることを意味します。

問 11. 次の関数で、x の値を次のように変えたとき、「x はどれだけ増やされているのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか」を調べて答えなさい。

(1) 関数 $y = 2x - 1$ で、x を -3 から -5 へ変える（入口から先に $x = -3$ を入れ、後に $x = -5$ を入れるという意味ですよ）

(2) 関数 $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ で、x を 4 から -6 へ変える（入口から先に $x = 4$ を入れ、後に $x = -6$ を入れるという意味ですよ）

(3) 関数 $y = 3x^2$ で、x を -3 から -1 へ変える（入口から先に $x = -3$ を入れ、後に $x = -1$ を入れるという意味ですよ）

(4) 関数 $y = 3x^2$ で、x を -1 から -3 へ変える（入口から先に $x = -1$ を入れ、後に $x = -3$ を入れるという意味ですよ）

答えを見る

ではいよいよ、「関数の変化の割合」とは何なのか説明することにしましょう。

これまで、ある 1 つの関数を決めてから、入口から入れる x をある数から別の数へと変え、そのときに出口から出てくる y がいくつからいくつへ変わるのかということを気にしてきました。そして特に、「入口から入れる x はどれだけ増やされたのか」ということと、

「出口から出てくる y はどれだけ増えたか」ということを気にしました。ここで、さらに次のような分数を作ることにします。

$$\frac{\text{出口から出てくる } y \text{ がどれだけ増えたか}}{\text{入口から入れた } x \text{ がどれだけ増やされたか}}$$

このようにして作られる分数の事を、「**変化の割合**」と呼んでいます。この説明だけでは「よくわかんなーい」という人もいるかもしれませんね。そこで例を使って説明することにしましょう。

例 6　関数 $y = -2x^2$ で、x を -3 から 5 へ変えるときの変化の割合を計算してみます。これまで学習してきたとおりの順番で考えていきます。

(1)　初め、入口から $x = -3$ を入れ、次に入口から $x = 5$ を入れるのでしたね。(-3 と 5 を入口から入れるわけですが、どっちを先にいれ、どっちをあとに入れたのかちゃんと覚えていてくださいね。) 今考えたことを、この後のために次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x ↓	あとに入れた x ↓
x	-3	5
y		

(2)　出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。初め入口に $x = -3$ を入れるのですから、初めに出てくる y は、

$$-2 \times (-3)^2 = -2 \times 9 = -18$$

ですね。

次は、入口から $x = 5$ を入れるのですから、次に出てくる y は、

$$-2 \times 5^2 = -2 \times 25 = -50$$

ですね。

つまり、先に -18 が出てきて、後に -50 が出てくるわけです。今、考えたことを、(1) で作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	-3	5
y	-18	-50

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3)　先に入れた x は -3 でした。あとから入れた x は 5 でした。ということは、後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているかというと、8 増えているのですね。つまり、ひきざんを使えば、

$$5-(-3)=8$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

8 増えている

x	-3	5
y	-18	-50

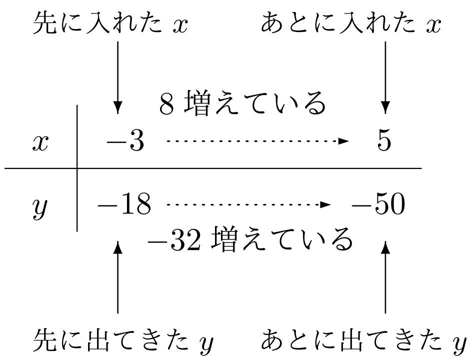
先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4)　先に出てきた y は -18 でした。あとから出てきた y は -50 でした。ということは、後から出てきた y は先に出てきた y よりどれだけ増えているかというと、-32

増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$(-50) - (-18) = -32$$

増えているということがわかるわけですね。これも最後に、表に追加して書いておきましょう。すると次のような表が完成します。



以上で、「x は 8 増やされている」ということと、「y は -32 増やされている」ということが調査できました。いよいよ、「変化の割合」の計算に取り掛かります。

(5)　「変化の割合」を求めるには、この例の前に書いた説明どおりの分数を作ればよいわけです。ですから、

$$変化の割合 = \frac{出口から出てくる\ y\ がどれだけ増えたか}{入口から入れた\ x\ がどれだけ増やされたか} = \frac{-32}{8} = -4$$

となるわけです。つまり、関数 $y = -2x^2$ で、x を -3 から 5 へ変えるときの変化の割合は -4 であることがわかりました。

では、もう 1 度ここで、変化の割合についてまとめておきましょう。

関数の変化の割合とは

関数が 1 つあるとします。また、入口から入れる x という数を 2 つ用意します。ここではそれらを、「数その 1 」、「数その 2」と呼ぶことにしておきます。また、入口から、「数その 1」を先に入れて、「数その 2」を後から入れることにします。このとき、

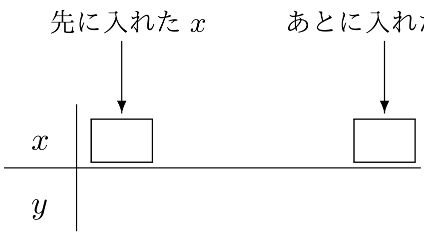
$$\frac{\text{出口から出てくる } y \text{ がどれだけ増えたか}}{\text{入口から入れた } x \text{ がどれだけ増やされたか}}$$

という分数を作ることにします。この分数のことを、**今考えている関数で、x を「数その 1」から「数その 2」へ変えたときの変化の割合**と呼びます。

問 12. 以下の文の空欄や表の空欄に正しい数を記入しなさい。

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、$y = 3x - 5$ ですよね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をします。そして、「x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べ、最後に「関数 $y = 3x - 5$ で x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合」を求めることにします

(1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。



(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、$y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{初めに出てくる } y \text{ は } \boxed{}$$

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{次に出てくる } y \text{ は } \boxed{}$$

ですね。つまり、先に $\boxed{}$ が出てきて、後に $\boxed{}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	-2	4
y	$\boxed{}$	$\boxed{}$

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{} - \left(\boxed{}\right) = \boxed{}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

$\square$ 増えている

x	-2	$\cdots\rightarrow$	4
y	-11		7

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\square - \left(\square \right) = \square$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

先に入れた x　　あとに入れた x

6 増えている

x	-2	$\cdots\rightarrow$	4
y	-11	$\cdots\rightarrow$	7

$\square$ 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

x は $\square$ 増え、y は $\square$ 増える

ということがわかりました。ということは、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

ということになりますね。

答えを見る

問 13. 次の関数で、x の値を次のように変えるときの変化の割合を計算しなさい。

(1) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 1 から 5 へ変える

(2) 関数 $y = -2x + 3$ で x を -3 から -6 へ変える

(3) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える

(4) 関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える

(5) 関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える

(6) 関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える

(7) 関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える

(8) 関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える

(9) 関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える

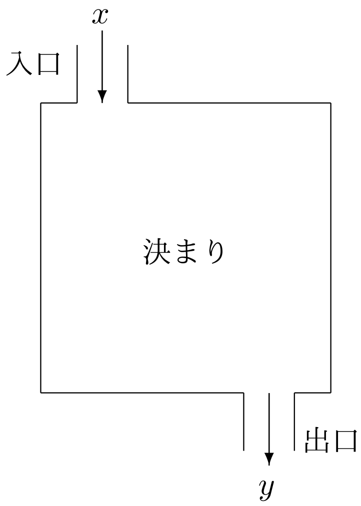
(10) 関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を 3 から -3 へ変える

答えを見る

1.4　関数のグラフ

関数のことを考えるときにとても大切な 3 つのものについて学んでいる所ですね。前の節までで、3 つのうち、「変域」と「変化の割合」の学習が終わりました。そこでこれから最後の 1 つ、「グラフ」について学習します。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでした。つまり、数 x を数 y に対応させる「決まりのことを関数と読んでいるのでした。また、入口から入れる数 x を色々と変えれば、たいていの場合、出口から出てくる数 y も変化するのでしたね。そこでここでは、次のようなことをテーマとして学習したいと思います。



テーマ　「入口から入れる x の変化」と、「出口から出てくる y の変化」の様子を一目でわかるようにするよい方法はないでしょうか？

実はもうすでに、あなたは「それなりに良い方法」を知っているのです。それは、「関数の表」を作ることですね。念のため、次の問で「関数の表」の作り方をおさらいすることにしましょう。

問 14.　$y = -2x + 3$ という数式で表される関数について考えることにします。入口から入れる x の値として -3、-2、-1、0、1、2、3 を入れると出口から出てくる y がどんな値になるのか調べ、次の表にまとめてください。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

答えを見る

さて、「関数の表」の作り方は思い出せたでしょうか。問 14 の答えは、次のようになっていれば正解です。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

この表を見れば、「x の変化」につれて、「y がどんなふうに変化していくのか」ということがそれなりに良くわかるでしょう。では、「x の変化」につれて、「y がどんなふうに変化していくのか」、次の問であなたに答えてもらうことにしましょう。

問 15. 前の問 14 で、$y = -2x + 3$ という数式で表される関数について考えることにしましたね。そして、入口から -3、-2、-1、0、1、2、3 を入れると出口から y としてどんな数が出てくるのか調べ、「関数の表」を作りましたね。そうすると、次のようになったはずです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

この表を良く見て次の質問に答えなさい。

(1) この関数 $y = -2x + 3$ では、x の値が増えるにつれて、y の値はどのように変化していきますか。

(2) この関数 $y = -2x + 3$ では、x の値がある値から別のある値へ、「とにかく 1 増える」と、y の値はどのように変化しますか。

答えを見る

どうですか、ちゃんと答えられましたか？念のためこの問 15 の答を教えておきましょ

う。あなたのためにもう一度ここに表を書いておきます。良く見てくださいね。

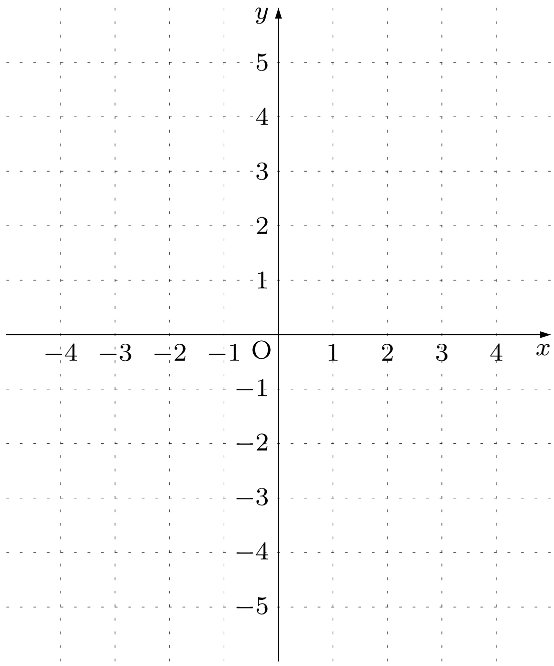
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

x が、-3、-2、-1、0、1、2、3 と増えていくにつれて、y は 9、7、5、3、1、-1、-3 と減っていきますね。そして特に、x がとにかく 1 増えると、どうも y は必ず 2 減るらしいということもわかりますよね。（意味わかりますか？表を良く見ることにしましょう。例えば x が -3 から -2 の所を見てください。x は -3 から -2 へ変わるので x は 1 増えるわけですが、y は 9 から 7 へ 2 減ってますよね。今度は、x が -2 から -1 の所を見てください。x は -2 から -1 へ変わるので x は 1 増えるわけですが、y は 7 から 5 へ 2 減ってますよね。また今度は、x が -1 から 0 の所を見てください。x は -1 から 0 へ変わるので x は 1 増えるわけですが、y は 5 から 3 へ 2 減ってますよね。さらに、この表の右のほうを見て同じようなことを考えてみてください。やっぱり、どこを見ても、x が 1 増えると、y は 2 減ってますよね。）

　このように、関数の表を作ると、「変化の様子」がそれなりに良くわかります。ですが、実は、もっと、「パッと見ただけ」で変化の様子がわかるように発明されたものがあるのです。それが**関数のグラフ**と呼ばれるものなのです。それではこれから、「関数のグラフ」の作り方を教えることにしましょう。ただ、そのために、準備が必要です。関数のグラフを作るためには「座標平面」と呼ばれているものを使うのです。ですから、まず、「座標平面」のことを学んでから、「関数のグラフ」の作り方を学ぶことにしましょう。

1.4.1　座標平面ってなに？

右の図を見てください。これが座標平面と呼ばれているものです。「あっ、こういうの、見たことある」と思った人もいるかも知れませんね。小学校でも、これと似たのを学びますから。小学校では、方眼紙を使ったり、もう印刷されているものを使ったりしたかもしれません。しかしこれから、あなたは、自分で「座標平面」を描かなくはいけないことが多くなります。ですから、座標平面の作り方をこれからあなたに教えることにしましょう。

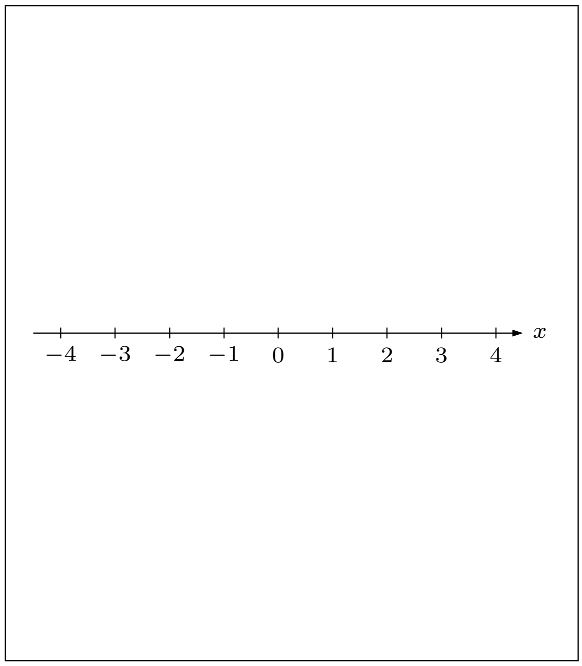


座標平面の作り方

(1) まず、紙を 1 枚用意します。なるべく大きく座標平面を作りたいので、なるべく、大きい紙を使いましょう。（もちろん、ノートを使ってもかまいません。）

(2) 右の図を見てください。

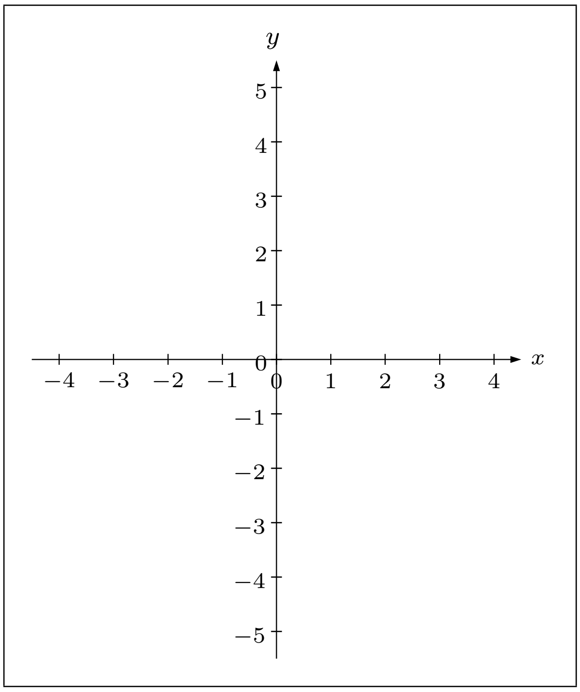
(1) で用意した紙に、水平に、まっすぐな線を 1 本書きます。そして、矢印を右端につけ、右端に x という文字を書き、目盛りを打ちます。この、まっすぐな線は x 軸という名前で呼ばれています。紙の上のどこにこのまっすぐな線を書くのがよいのかということは、問題によって変わります。あなたが問題を良く頭に入れて色々と考えて決めるしかありません。まあ初めてです



から、ここでは紙の真ん中あたりに書くことにしましょう。目盛りは普通、間隔が等しくなるように打ちます。目盛りを打つ間隔はあなたが考えて決めるしかありません。1 きざみで目盛りを打つのが良いのか、0.5 きざみで目盛りを打つのが良いのかというようなことは問題によって変わってくるのです。また、いくつからいくつまでの目盛りを作るのかということも、あなたが良く考えて決めるのです。まあ初めてですから、ここでは、x が -4 から 4 の範囲で、1 きざみに目盛りを作ることにします。

結局ここでは、数直線を水平に書いたことになります。そしてこの数直線は、x の値を読み取るために使われるのです。

(3) 右の図を見てください。



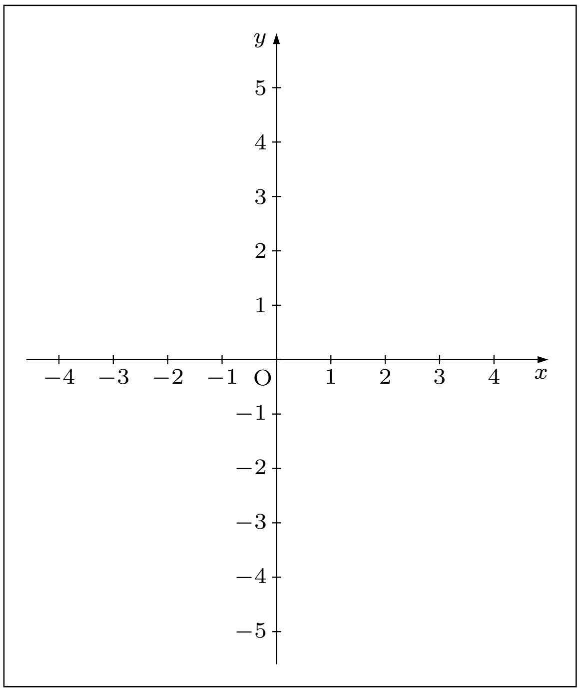
次は、この図のように、縦にまっすぐな線を書きます。どこに書いても良いというわけではありません。(1) で x 軸を書いたので、これから書くまっすぐな縦の線を書く場所は決まっているのです。どこに書くのかというと、(1) で作った x 軸の 0 の所を通るように書くのです。0 の所を通って、x 軸に垂直になるように、縦にまっすぐな線を書くのです。もちろん、目盛りも打ちます。縦の線の目盛りは、x 軸と交わる所が 0 になるようにしてつけます。目盛りの間隔は x 軸と同じにすると良いでしょう。また、一番上の端に矢印をつけ、y という文字を書いておきます。このまっすぐな縦の線は y 軸という名前で呼ばれています。

結局ここでは、x 軸の 0 のところを通るように、数直線を垂直に書いたことになります。そしてこの数直線は、y の値を読み取るために使われるのです。

(4) (2) で水平なまっすぐな数直線を書きましたね。そしてこれは、「x 軸」と呼ばれるのでした。また (3) では x 軸の 0 のところを通るように、垂直なまっすぐな数直

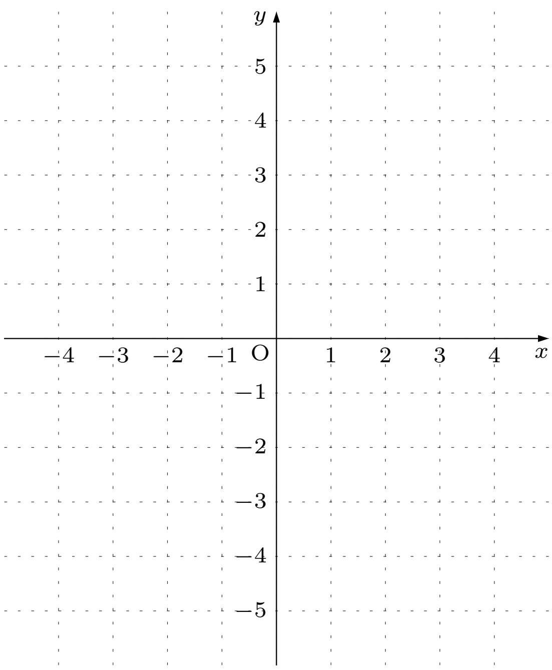
線を書きましたね。そしてこれは「y 軸」と呼ばれるのでした。そうすると、2 本の数直線は 0 のところで交わっているわけですが、目盛りをつけるときに書いた 0 が、2 個そばにあって、くっついていて見にくいですよね。((3) の説明の図を見てください。）そこで、2 つの 0 は 1 つにまとめてしまいましょう。

右の図を見てください。x 軸を書いたときにつけた 0 と、y 軸を書いたときにつけた 0 を 1 つにまとめて、アルファベットの大文字の O に変えました。つまり、x 軸と y 軸の交わる所に、O という大文字のアルファベットを書いたのです。（別に、このようにしなければいけないというわけではありません。昔からの習慣で、そうするようになっているだけです。このほうが見やすいですからね。）



この場所 O、つまり x 軸と y 軸の交わる所は、**原点**と呼ばれています。

(5) 最後に、点線で、「格子」を付けます。右の図を見てください。このように、方眼紙に似たものができるわけです。さっき、「点線で」と言いましたが、点線でなくても「薄く細い線」で描いても良いでしょう。



これで、座標平面の出来上がりです。

注意　(5) で格子を付けました。格子が付いている座標平面はとても使いやすいのですが、作るのが大変です。実は、かなり慣れてくると、格子が付いていなくても「心の目」を使うと、格子が見えるようになります。「心の目」で格子が見えるようになった人は、格子を付けるのをサボっても良いでしょう。

座標平面の作り方がわかったので、次は、座標平面を使う練習をしましょう。

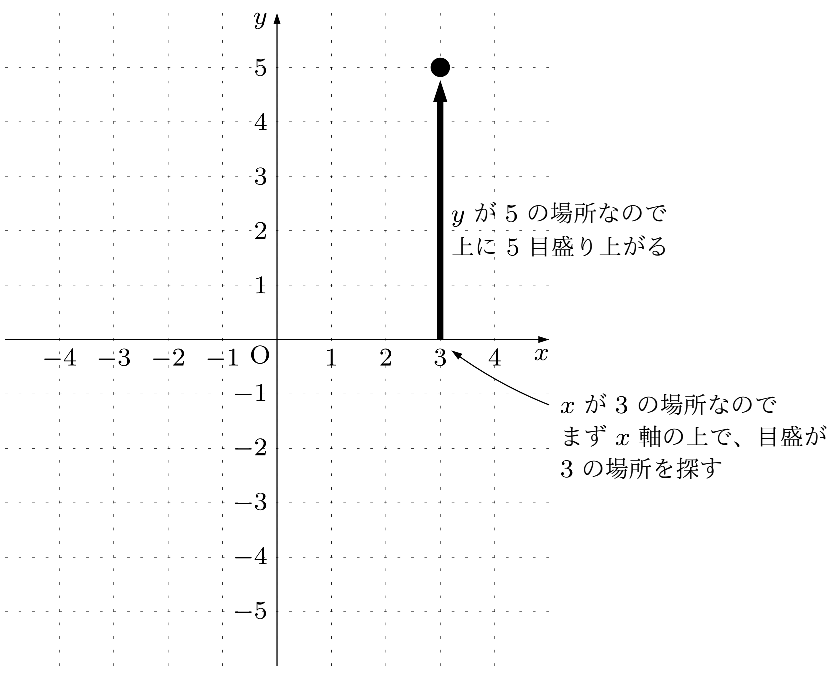
座標平面に点を打つ練習をしよう

2 つの数を組にすると、座標平面に点を打つことができます。例を使って説明することにしましょう。

例 7　2 つの数として、3 と 5 を組にして座標平面に点を打ってみることにします。

組にしてあるということを強調するために、よく、$(3, 5)$ のように書くことがあります。つまり、かっこを使って、かっこの中に 2 つの数を並べて書くのです。2 つの数の間には「カンマ」を書きます。2 つの数を並べる順番は重要です。つまり、$(3, 5)$ と書いてあるのと $(5, 3)$ と書いてあるのは違うのです。注意してください。

それでは、2 つの数の組として $(3, 5)$ を使って説明を続けます。あなたは、$(3, 5)$ と書いてあるのを見たら、座標平面の「x が 3 で、y が 5 の場所」に点を打てばよいのです。次の図を見てください。黒丸の打ってある場所が $(3, 5)$ の場所です。

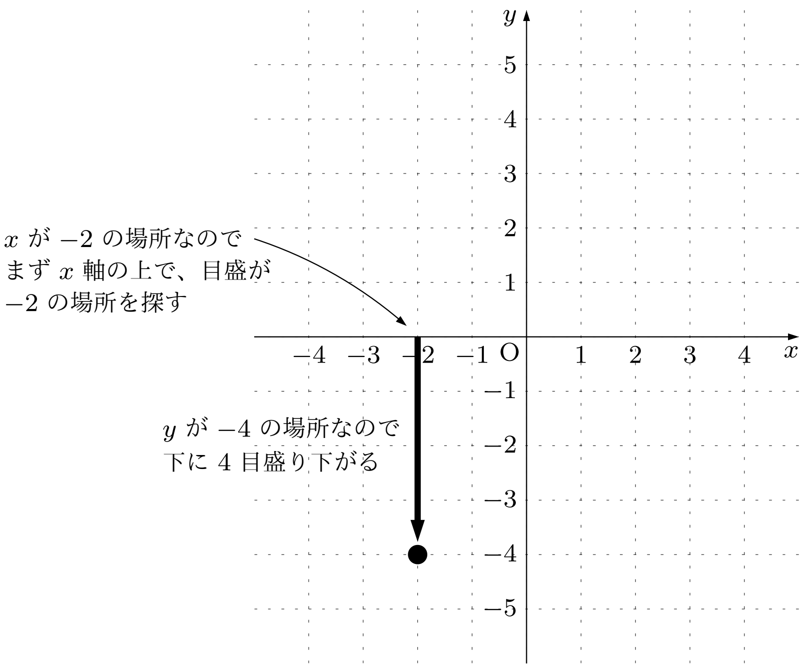


さっき、「x が 3 で、y が 5 の場所」と言いましたが、場所の探し方はわかりましたか？念のため詳しく説明しておきましょう。x が 3 なので、まず x 軸を見て目盛りに 3 と書いてある場所を探します。さらに、y は 5 なので、今探した場所、（つまり x 軸上にある、目盛りが 3 の場所）から上に 5 目盛り進むのです。そうすると $(3,5)$ の場所にたどりつくのです。

例 8　今度は、2 つの数として、-2 と -4 を組にして考えることにしましょう。

組にしてあるということを強調するために、$(-2,\ -4)$ のように書いておきます。前の例で説明したように、かっこの中にある 2 つの数のうち、左に書いてあるのは x の値で、右に書いてあるのは y の値でしたね。

ですからあなたは、$(-2,-4)$ と書いてあるのを見たら、「x が -2 で、y が -4 の場所」に点を打てばよいのです。次の図を見てください。黒丸の打ってある場所が $(-2,-4)$ の場所です。



さっき、「x が -2 で、y が -4 の場所」と言いましたが、場所の探し方はわかりましたか？念のため詳しく説明しておきましょう。x が -2 なので、まず x 軸を見て目盛りに -2 と書いてある場所を探します。さらに、y は -4 なので、今探した場所、（つまり x 軸

上にある、目盛りが -2 の場所）から下に 4 目盛り進むのです。そうすると $(-2,-4)$ の場所にたどりつくのです。

では、今度はあなたに点を打つ練習をしてもらいましょう。

問 16. 次の文を読んで、この問題の最後についている座標平面の上に点を打ちなさい。ただし、どの点がどの問題の答えなのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) x が 4 で、y が 2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4,2)$ の場所に点を打ちなさい。

(2) x が 4 で、y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4,-2)$ の場所に点を打ちなさい。

(3) x が -4 で、y が 2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4,2)$ の場所に点を打ちなさい。

(4) x が -4 で、y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4,-2)$ の場所に点を打ちなさい。

(5) x が 3.5 で、y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(3.5,-2)$ の場所に点を打ちなさい。

(6) x が $-\dfrac{5}{2}$ で、y が $\dfrac{3}{2}$ の場所に点を打ちなさい。つまり $\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ の場所に点を打ちなさい。

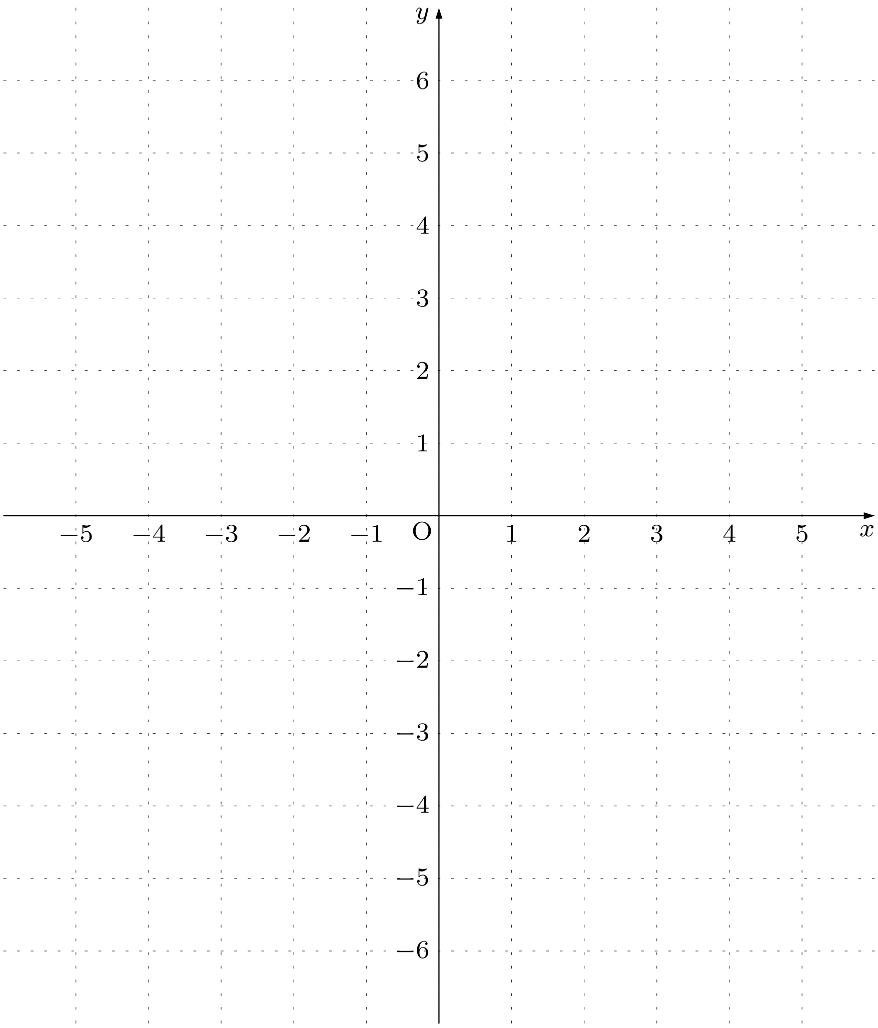
(7) x が 4 で、y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4,0)$ の場所に点を打ちなさい。

(8) x が -4 で、y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4,0)$ の場所に点を打ちなさい。

(9) x が 0 で、y が 4 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0,4)$ の場所に点を打ちなさい。

(10) x が 0 で、y が -4 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0,-4)$ の場所に点を打ちなさい。

(11) x が 0 で、y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0, 0)$ の場所に点を打ちなさい。



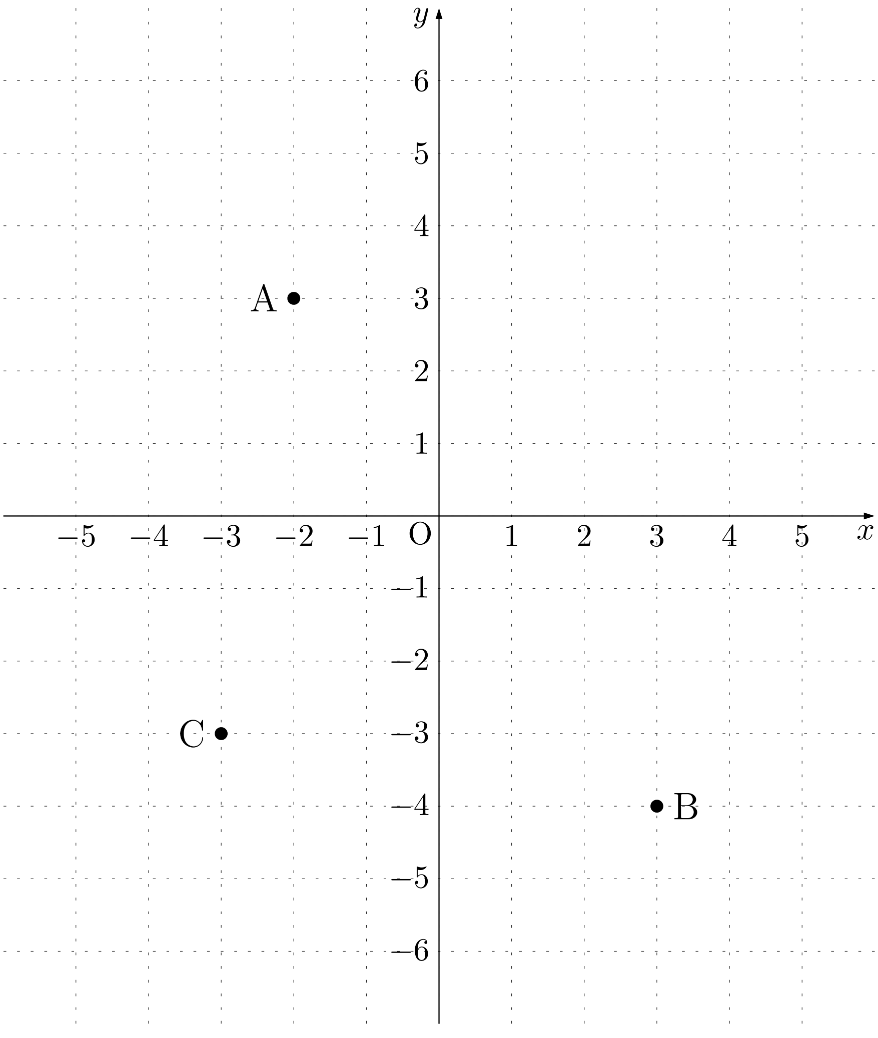
答えを見る

では話を進めることにしましょう。

これまで学習してきたように、座標平面の上の点の場所は、2 つの数を組にすることによって伝えることができます。つまり、もしあなたがだれかに座標平面の上にある点の場所を伝えたければ、その点の場所を指でさす代わりに、2 つの数を組にして伝えれば良いのです。そして、2 つの数の組は、例えば (3, 5) のように書くのでした。この (3, 5) ように、点を表している 2 つの数の組を、その点の**座標**と呼びます。かっこの中に書いてある 2 つの数のうち、左の数は x の値を表すので、特に x **座標**と呼ばれています。また、右の数は y の値を表すので、特に y **座標**と呼ばれています。ですから、$(3, 5)$ という点の x 座

標は 3 で、y 座標は 5 ということになります。また、点にはよく、アルファベットで名前をつけることがあります。例えば、「点 A」とか「点 B」のように呼ぶわけです。そして、例えば、$(3,5)$ のように表されている点が「A」と言う名前だったら、A と $(3,5)$ をくっつけて、$\mathrm{A}(3,5)$ と書くことがあります。ですから、あなたは、$\mathrm{A}(3,5)$ と書いてあるのを見たら、「座標平面の上の、x が 3 で、y が 5 の所に点があるのだな。そして、その点の名前は A なのだな。」と思わなくてはいけません。

例 9　次の座標平面を見てください。3 つの点 A、B、C があります。

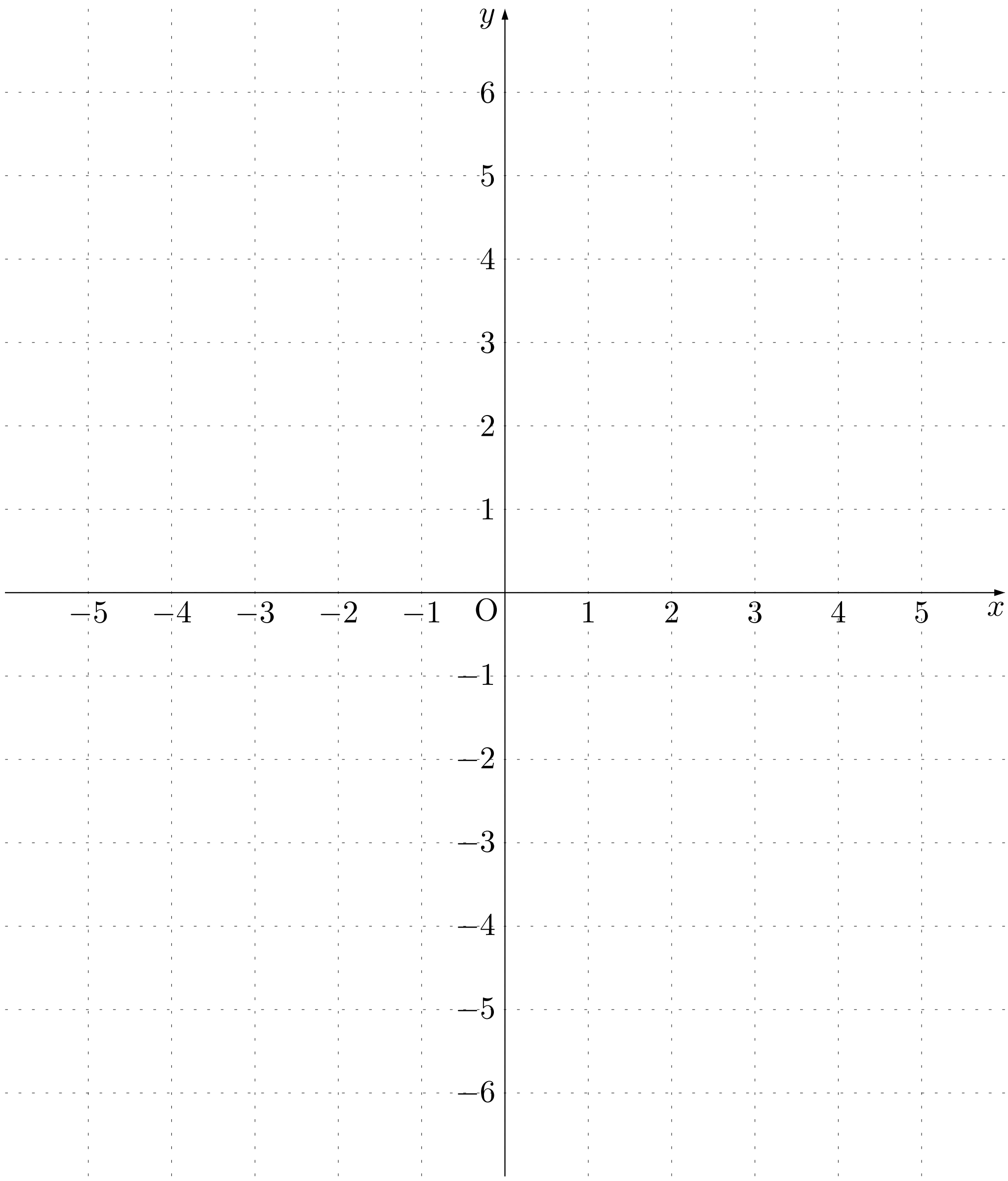


点 A の座標は $(-2,3)$ で、点 B の座標は $(3,-4)$ で、点 C の座標は $(-3,-3)$ ですね。また、原点 O の座標はもちろん $(0,0)$ ですよね。

問 17. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $A(0,5)$　(2) $B(-5,2)$　(3) $C(-3,-1)$

(4) $D(3,-1)$　(5) $E(-2,3)$　(6) $F(-4,-6)$

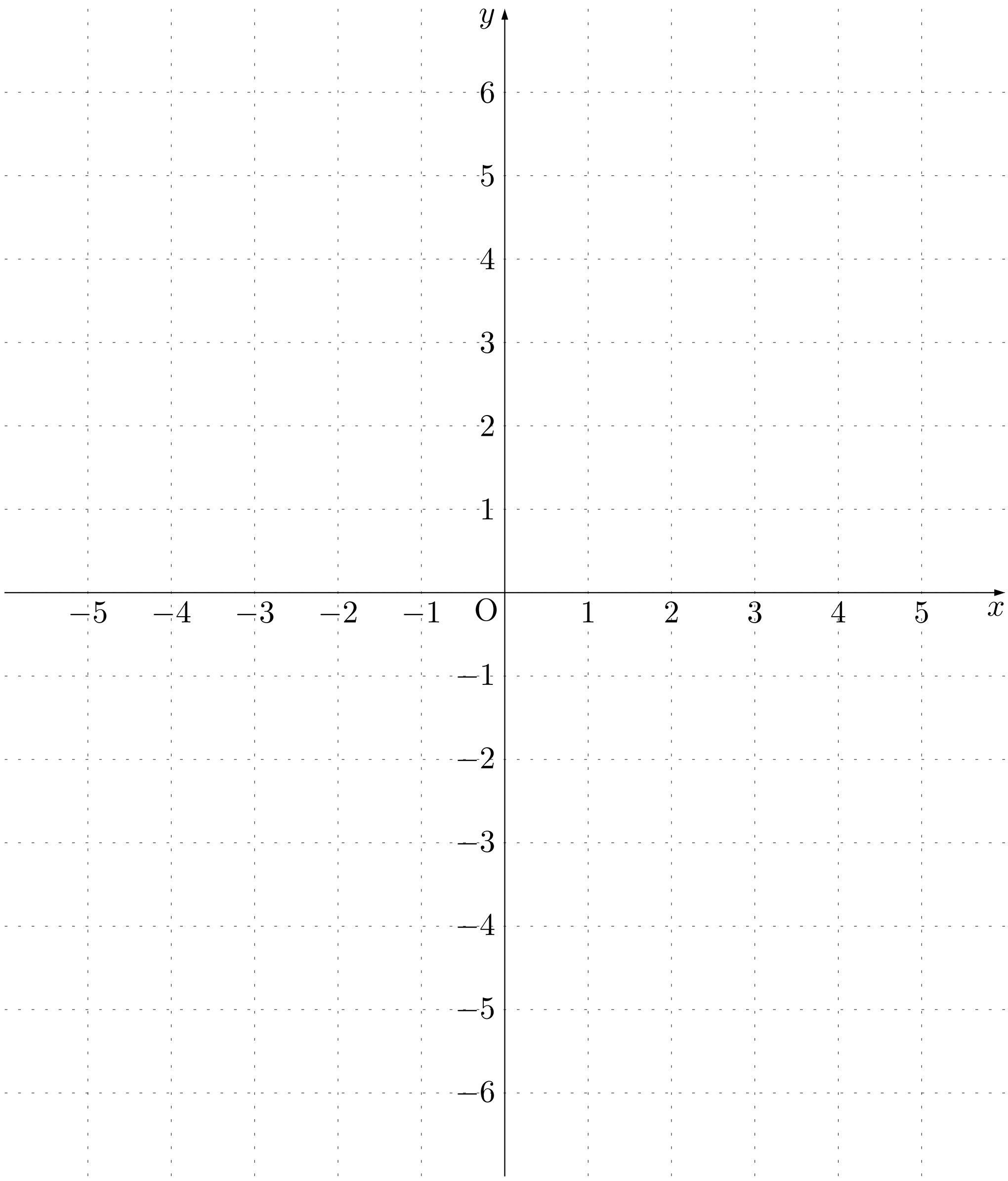


答えを見る

問 18. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $\mathrm{A}(1, 5.5)$　(2) $\mathrm{B}(-5, 2.2)$　(3) $\mathrm{C}(-3.5, -1.5)$

(4) $\mathrm{D}(3.8, -1.6)$　(5) $\mathrm{E}(-2.5, 3)$　(6) $\mathrm{F}(-4.3, -6)$

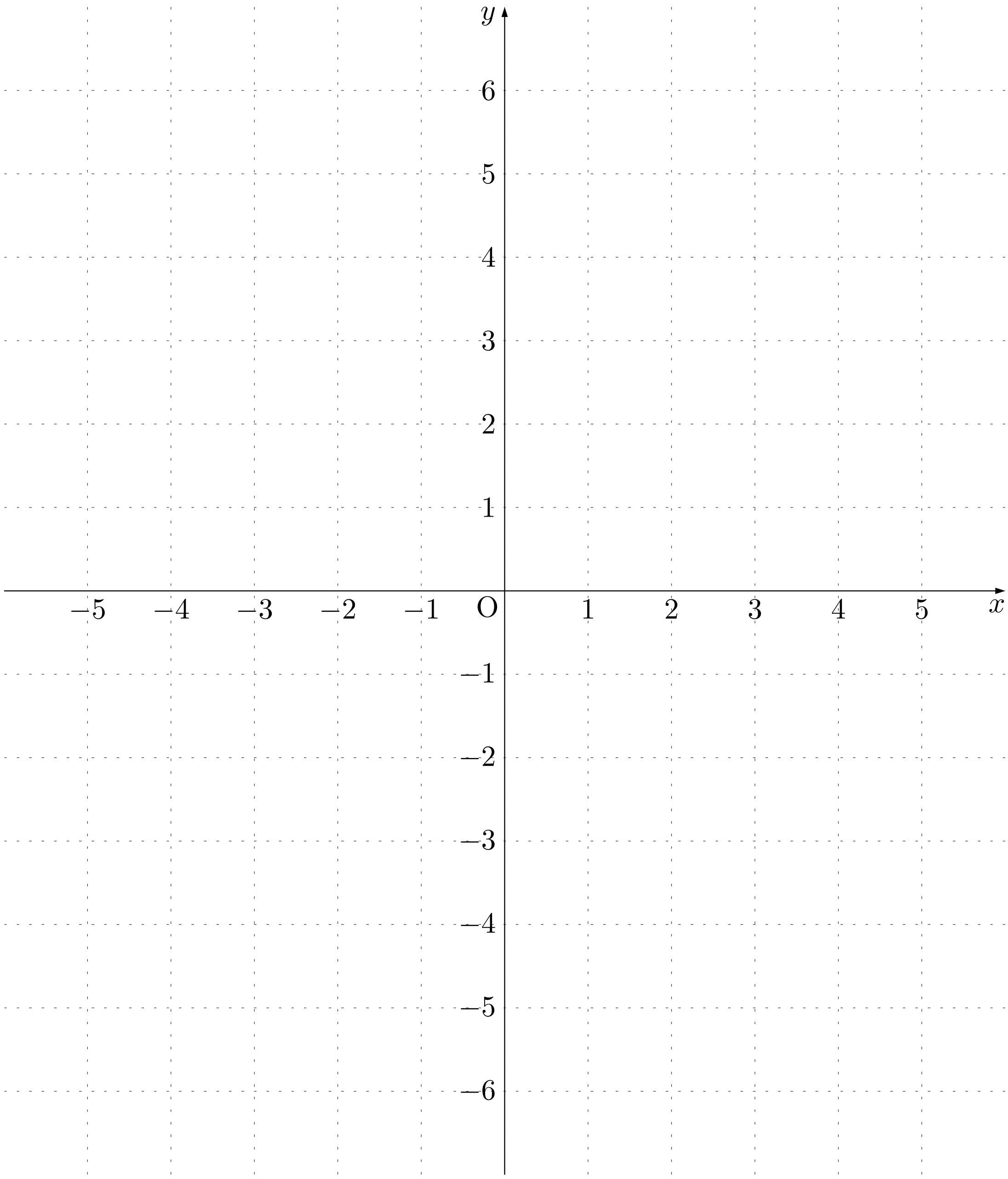


答えを見る

問 19. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $\mathrm{A}\left(1, \dfrac{7}{2}\right)$　(2) $\mathrm{B}\left(-5, \dfrac{3}{4}\right)$　(3) $\mathrm{C}\left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{4}{5}\right)$

(4) $\mathrm{D}\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$　(5) $\mathrm{E}\left(-2, \dfrac{12}{5}\right)$　(6) $\mathrm{F}\left(-4.5, -\dfrac{9}{2}\right)$



答えを見る

1.4.2　関数のグラフの作り方

座標平面についての学習が終わりました。それではいよいよ、「関数のグラフ」の作り方を学習することにしましょう。例を使って説明していきます。

例 10　関数 $y = 2x - 1$ のグラフを作ることにします。

まず、準備として、この関数 $y = 2x - 1$ の表を作ります。調べる x の範囲ですが、ここでは「x は -3 ぐらいから 3 ぐらいまで」にしておきましょう。また、どれぐらい細かく調査するのかということですが、まぁここでは「1 きざみ」で調査をすることにしましょう。（本当は調べる範囲はできるだけ広いほうが良いのです。また調べる細かさ、つまりきざみもできるだけ細かいほうが良いのです。とは言っても、人間には限界があります。ですから、ためしにこのぐらいの範囲と細かさで調べてみるのです。それで困ったことが出てきたら、また後で調査を詳しくするのです。）すると次のような表ができるはずです。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	$\cdots$

念のための注意をしておきましょう。この表の中には $\cdots$ が書いてあるところがあります。例えば、x の段の 3 の右です。さっきも言ったように、本当はできるだけ範囲を広くして調査したいのです。しかし、「キリがない」ので「がまんしている」のです。本当は x が 4 の所とか 5 の所とか 6 の所 $\cdots$ も調べたいのです。ですから、この表は、「本当は 3 より先もあるんだけどね」という気持ちを込めて $\cdots$ が書いてあるのです。ほかにも $\cdots$

が書いてあるところがありますが、どれも同じような気持ちなのです。

では次へ進みましょう。次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのです。どのように点を打つのかこれから説明しましょう。

この「関数の表」を左から見ていきます。そして x の値と y の値を組にして考えます。例えばこの表を左から順に見ていくと、まず、「x が -3 で y が -7」の所がありますね。（大丈夫ですか？ x の段と y の段を縦に組にして考えるのですよ。だって、そもそも、入口から入れる x が -3 のときに、出口から出てくる y は -7 になるということなのですから。）ここを見たら、「$(-3,-7)$ という座標で表される点」を座標平面の上に打つのです。もう一度念のために言います。この表には x が -3 で y が -7 の所があるので、座標平面の上で、x が -3 で y が -7 の所に点を打つのです。

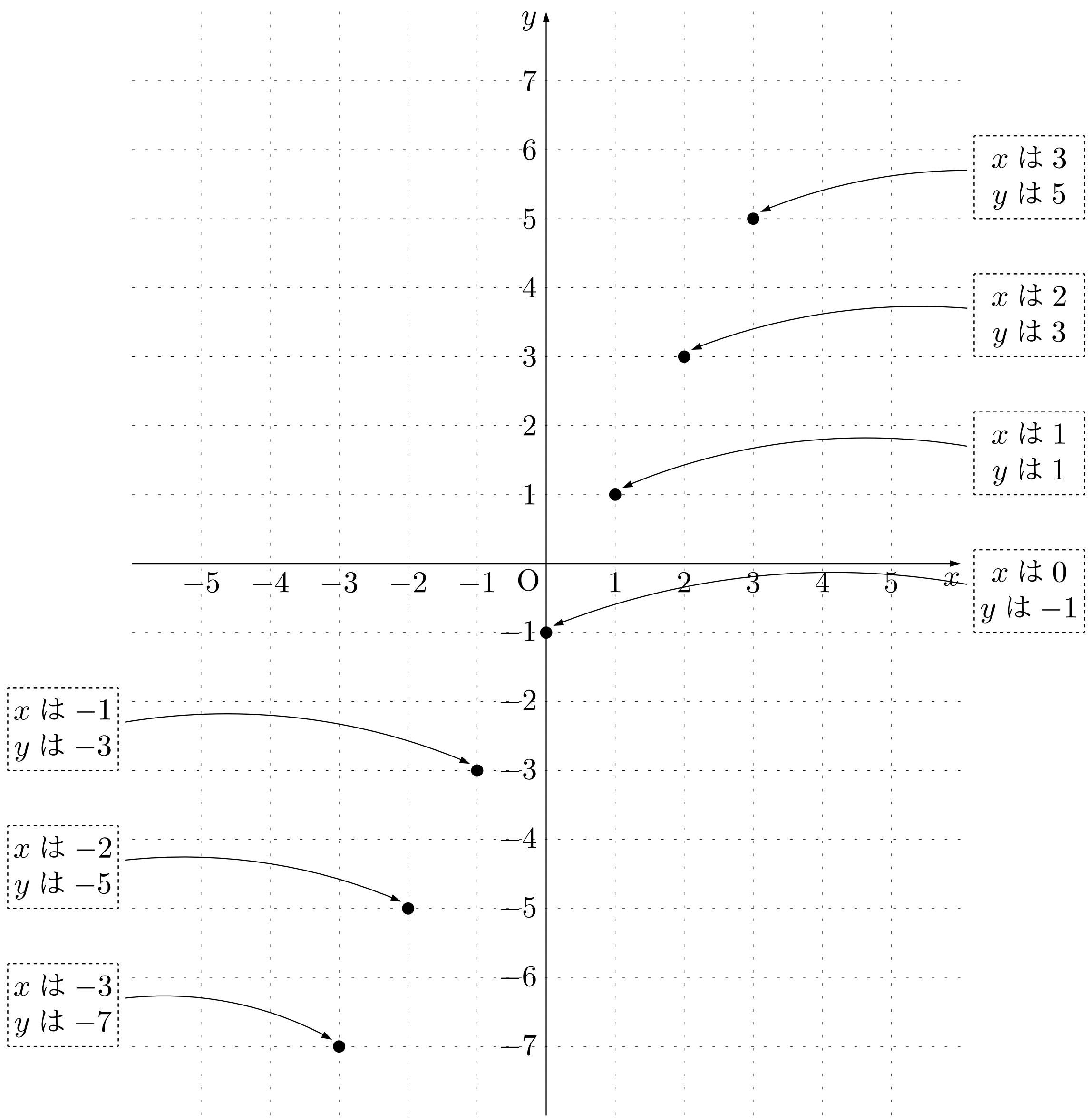
では次は、この表で、さっきの隣を見てみましょう。（あなたのためにもう一度表を書いておきます。）

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	$\cdots$

今度は、x は -2 で y は -5 ですね。ということは、今度は、座標が $(-2,-5)$ であるような点を座標平面の上の打つのです。

このようにして、この「関数の表」を見て、座標平面の上に点を次々に打っていくのです。そうすると、この「関数の表」では最後に、x が 3 で y が 5 の所が出てきますね。ですから最後に、座標が $(3,5)$ である点を座標平面の上に打つことになります。

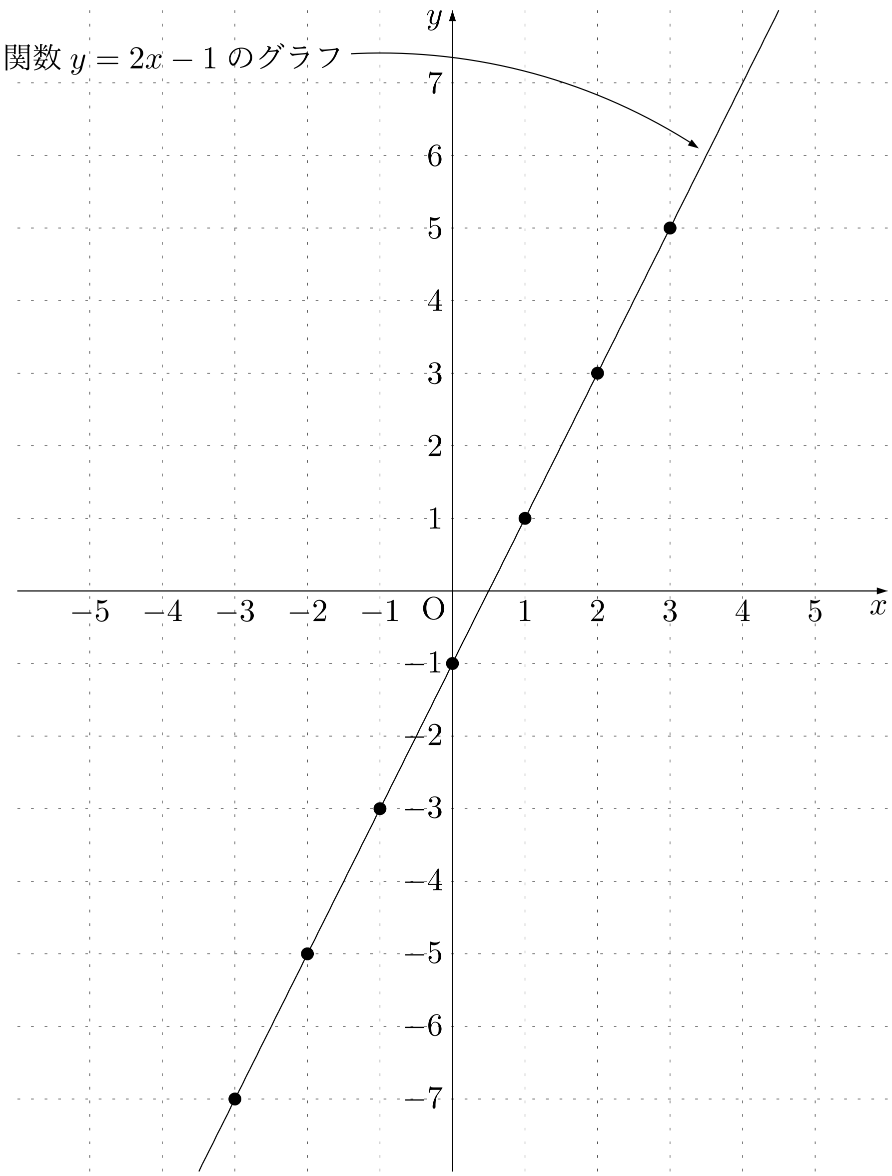
そうすると、今、次のようになるはずです。



次に進む前に、念のための注意をしておきましょう。「関数の表」を見ながら、座標平面に点を打ちましたね。今、全部で 7 個の点が打ってあるはずです。どうして 7 個なのかというと、それはもちろん、x の値を 7 個用意して表を作ったからですね。つまり x がそれぞれ -3、-2、-1、0、1、2、3 のときに y がいくつになるか調べたからですね。でも本当は、もっともっと詳しく調べたいのですよね。もっときざみを詳しくして調べたり、もっと広い範囲を調べたいのですよね。そして、もっともっと詳しく調べていれば、点は 7 個打たれるだけではなくて、もっともっとたくさん点が打たれていたはずですね。たく

さん点が打たれれば打たれるほど本当のことがわかってきます。つまり、本当のことを知りたければ、もっともっと詳しい調査が必要なのです。しかし人間には限界があります。ある程度のところでがまんするしかありません。ですから、「もっと詳しく調べたら、さらに、どこに点が打たれるのか想像する」のです。関数を表す式「$y = 2x - 1$」や、さっき作った「関数の表」と相談しながら想像するのです。そして、想像ができたら、7 個の点の間を本当らしく結ぶのです。

　このようにして、最後に、打たれた点たちの間を、「本当らしく」結ぶと、「関数のグラフ」は完成です。そうすると、「関数 $y = 2x - 1$ のグラフ」は次のようになります。



関数 $y = 2x - 1$ のグラフは、まっすぐな線になりました。また右上や、左下へ果てしなく伸びていきます。つまり、関数 $y = 2x - 1$ のグラフは「直線」になるのです。

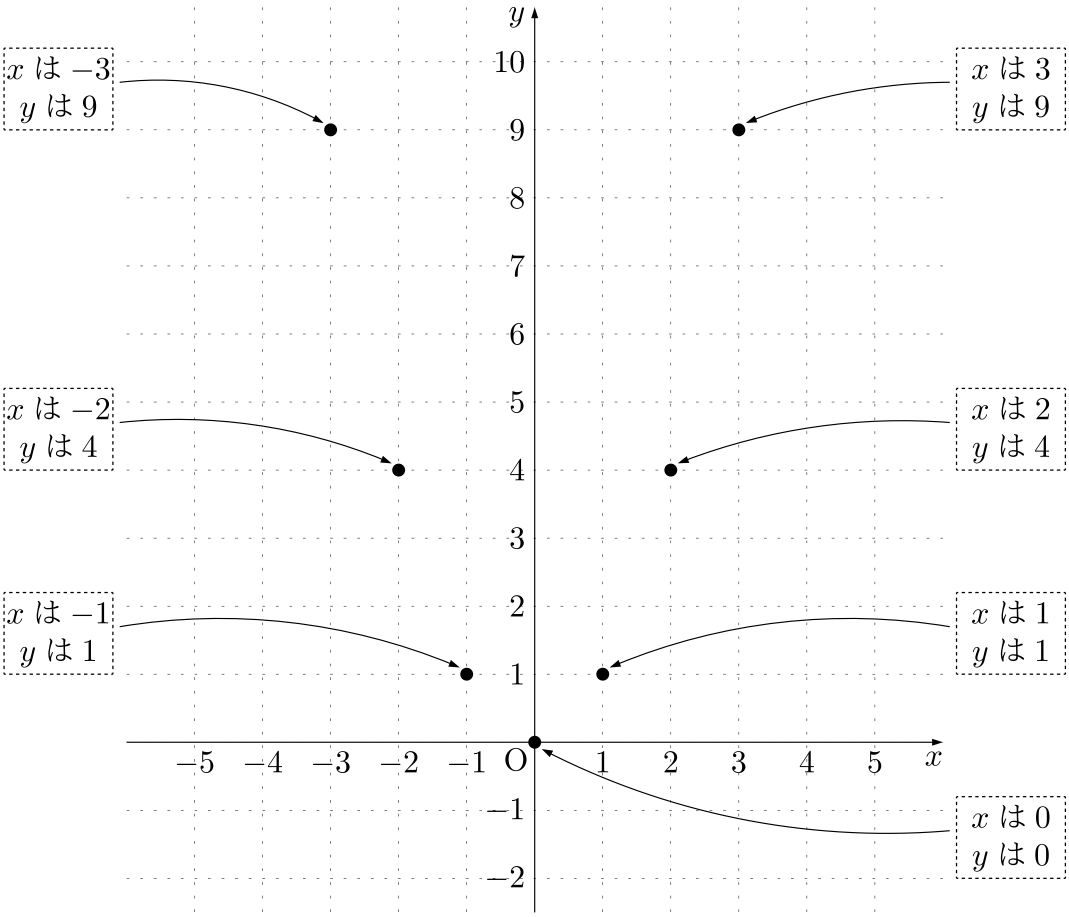
例 11　関数 $y = x^2$ のグラフを作ってみます。

まず、準備として、この関数 $y = x^2$ の表を作ります。調べる x の範囲ですが、ここでは、「x は -3 ぐらいから、3 ぐらいまで」にしておきましょう。また、どれぐらい細かく調査するのかということですが、まぁここでは「1 きざみ」で調査をすることにしましょう。（本当は、調べる範囲はできるだけ広いほうが良いのです。また調べる細かさ、つまりきざみもできるだけ細かいほうが良いのです。とは言っても人間には限界があります。ですから、ためしにこのぐらいの範囲と細かさで調べてみるのです。それで困ったことが出てきたら、また後で調査を詳しくするのです。）すると、次のような表ができるはずです。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

念のための注意をしておきましょう。この表の中には $\cdots$ が書いてあるところがあります。例えば、x の段の 3 の右です。さっきも言ったように、本当はできるだけ範囲を広くして調査したいのです。しかし、「キリがない」ので「がまんしている」のです。本当は x が 4 の所とか 5 の所とか 6 の所 $\cdots$ も調べたいのです。ですから、この表は、「本当は 3 より先もあるんだけどね」という気持ちを込めて $\cdots$ が書いてあるのです。ほかにも $\cdots$ が書いてあるところがありますが、どれも同じような気持ちなのです。

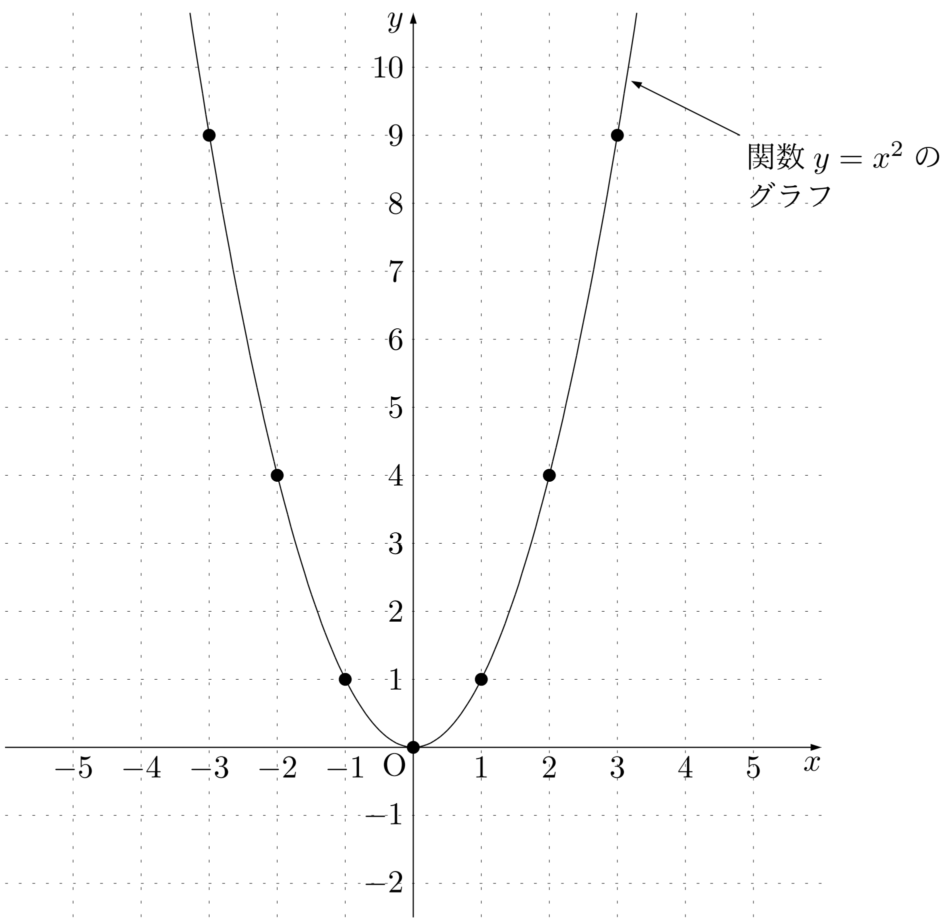
では次へ進みましょう。次は、この表を見ながら 座標平面に点を打ちます。どのように点を打つのか、前の例 10 で詳しく説明したので、もういちいち説明しません。この「関数の表」を見て点を打つと、次のようになるはずです。



このように、「関数の表」を見ながら座標平面の上に点が打てたら、最後に、点たちの間を「本当らしく」結ぶのですね。でも今の場合、ちょっと悩みますね。前の例 10 では、点たちは、どうもまっすぐに並んでいるようでしたね。（前の例、見直してみてくださいね。）また、前の例では、表の y の段に並んでいる数を見ても、まっすぐに結んでよいような気配がありありでした。そしてもっともっと細かい調査をすれば、打った点の間に、ほかの点たちがまっすぐ、ずらりとたくさん出てくるように思われました。ですが、この例の関数はどうでしょう。さっき打った点を見ても、、表の y の段に並んでいる数を見ても、まっすぐ並んでいるようには思えないですよね。点と点の間をまっすぐ結ぶのは気が引けますよね。どうしたらよいのでしょうか。

このようなとき本当のことを知りたければ、詳しい調査をするしかないのです。つまり、x の値を 1 きざみで変えて調べているだけではなく、0.5 きざみで変えて調べるとか、

もっとがんばって 0.1 きざみで変えて調べるとかしないといけないのです。そうやって、打つ点をたくさん調べるのです。そうすれば、さっき打った点たちの間をどうやって結べばよいか、だんだんわかってくるのです。ですからあなた、がんばって調べてください。そうすると、$y = x^2$ のグラフは、次のようになるということがわかるでしょう。



このように、点と点の間をなめらかに結ぶのがコツです。（無理にまっすぐ結ぶと「とがった所」や「折れ曲がった所」ができてしまいます。）関数のグラフには、このように、曲がっているものもあるのです。

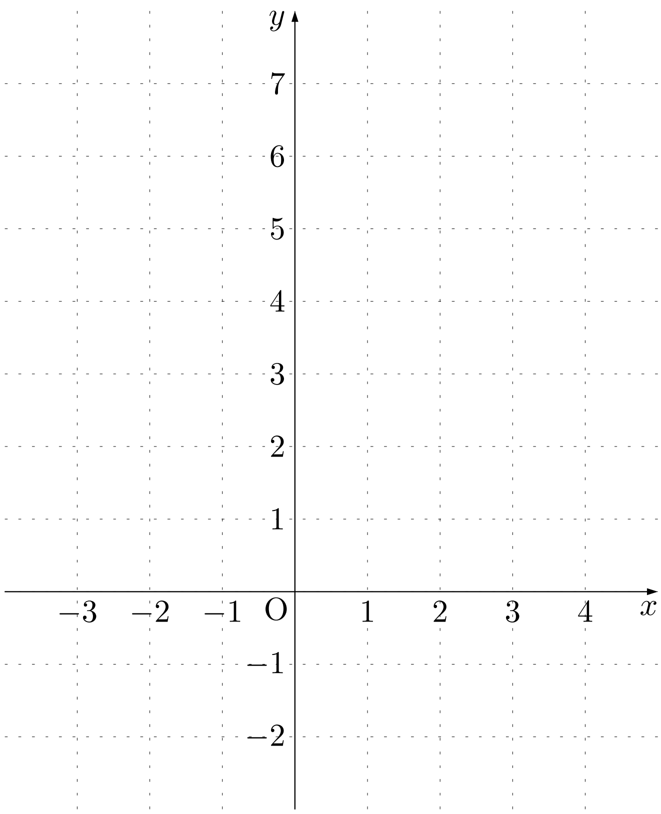
さて、二つの例を使って、関数のグラフの作り方を学びました。それでは今度は、あなたに関数のグラフを作ってもらうことにしましょう。

問 20. 関数 $y = -x + 3$ のグラフをこれから作ります。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y = -x + 3$ の表を作ります。ここでは、x の範囲を -3 から 4 までにして、x の値を 1 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$									$\cdots$

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



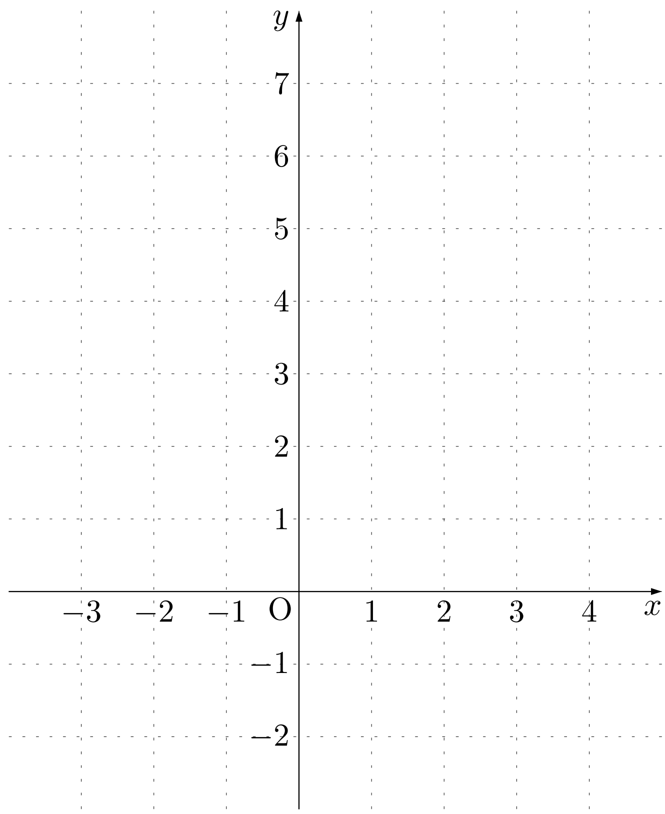
点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、上の座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y = -x + 3$ のグラフを完成してください。 答えを見る

問 21. 前の問 20 と同じ関数 $y=-x+3$ のグラフを、前より気合を入れてこれから作ります。つまり、きざみを細かくして調査をしてから、グラフを作ることにします。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y=-x+3$ の表を作ります。ここでは、x の範囲を -3 から 4 までにして、x の値を 0.5 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	$\cdots$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	$\cdots$
y	$\cdots$																$\cdots$

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、この座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y=-x+3$ のグラフを完成してください。（前の

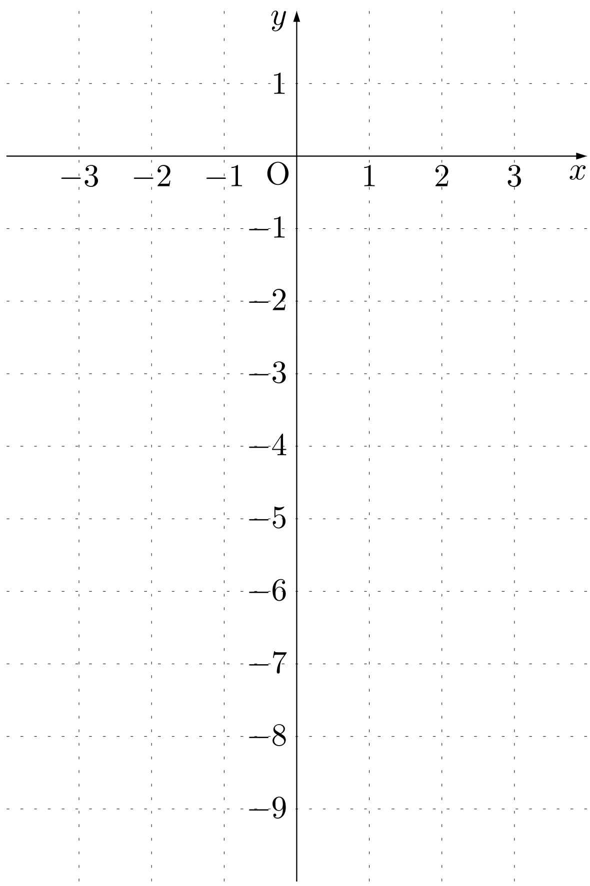
問 20 を解いたときより「きざみを細かくして」考えたので、打った点の数は前より増えています。ですから前より自信を持って、点たちの間を結べますね。) 答えを見る

問 22. 関数 $y = -x^2$ のグラフをこれから作ります。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y = -x^2$ の表を作ります。ここでは、x の範囲を -3 から 3 までにして、x の値を 1 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$								$\cdots$

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、この座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y=-x^2$ のグラフを完成してください。 答えを見る

問 23. 次の関数のグラフを作りなさい。

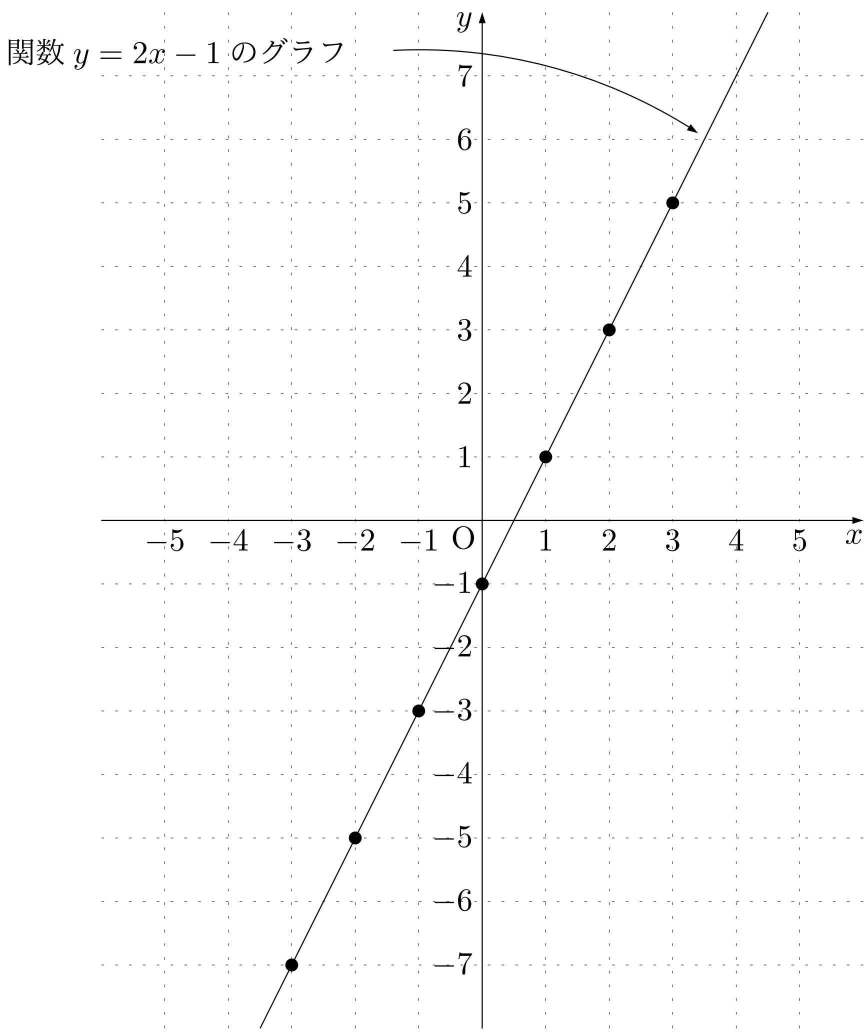
(1) 関数 $y=x+2$
(2) 関数 $y=-x+1$
(3) 関数 $y=2x-5$
(4) 関数 $y=-3x+1$
(5) 関数 $y=-x^2$
(6) 関数 $y=2x^2$
(7) 関数 $y=\dfrac{1}{x}$
(8) 関数 $y=-\dfrac{1}{x}$

答えを見る

1.4.3　関数のグラフを見ると、変化の様子が良くわかる

さて、ここまで、「関数のグラフ」の作り方を学んできました。ところで何のために「関数のグラフ」を作るのでしたっけ？たしか、「関数のグラフ」をつくると、関数の変化の様子がよくわかるからでしたね。では、これから色々な「関数のグラフ」を見て、変化の様子が読み取れるのかどうか考えてみることにしましょう。

例 12　例 10 で関数 $y=2x-1$ のグラフを描きました。そこで、「関数 $y=2x-1$ のグラフ」と、グラフを作るために作った「関数 $y=2x-1$ の表」をもう 1 度見てみることにしましょう。たしか、次のようになっていましたね。

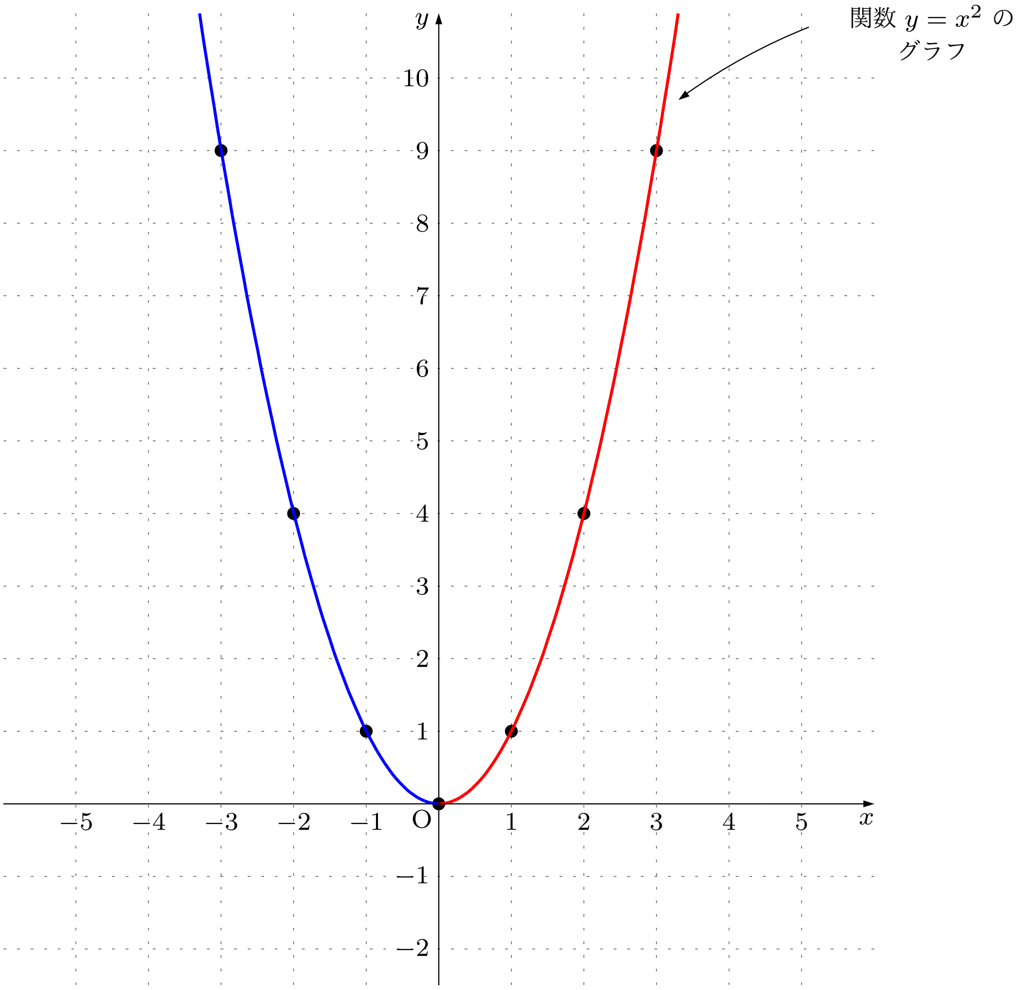


関数 $y = 2x - 1$ の表

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	$\cdots$

「グラフ」と「表」を両方見てください。「グラフ」は、全体的に右上がりです。また、「表」を見ると、x が-3、-2、-1、1、$\cdots$ と増えていくにつれて、y も-7、-5、-3、-1、$\cdots$ と増えていくことがわかります。つまり、**関数のグラフが右上がりになるということは、x が増えると y も増えるということを意味している**のです。

例 13　例 11 で関数 $y = x^2$ のグラフを描きました。そこで、「関数 $y = x^2$ のグラフ」と、グラフを作るために作った「関数 $y = x^2$ の表」をもう 1 度見てみることにしましょう。たしか、次のようになっていましたね。



関数 $y = x^2$ の表

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$

大切なことを説明するために、関数 $y = x^2$ のグラフに色を付けておきました。このグラフでは、x が 0 以下の所を青く描き、x が 0 以上の所を赤く描きました。

ではまず、「グラフの青い部分」と「表」を見てください。青く描いたところ、つまり、

x が 0 以下の所ではグラフは右下がりになっています。また、「関数の表」では、x が 0 以下の所だけを見ると、x が-3、-2、-1、0 と増えるにつれて、y は9、4、1、0 と減っていくことがわかります。つまり、**関数のグラフが右下がりになるということは、x が増えると y は減るということを意味している**のです。

では次に、「グラフの赤い部分」と「表」を見てください。赤く描いたところ、つまり、x が 0 以上の所ではグラフは右上がりになっています。また、「関数の表」では、x が 0 以上の所だけを見ると、x が0、-1、2、3 と増えるにつれて、y は0、1、4、9 と増えていくことがわかります。つまり、**関数のグラフが右上がりになるということは、x が増えると y は増えるということを意味している**のです。

2 つの例で、関数のグラフの形と、関数の変化の仕方には関係があるということを見てきました。座標平面の上では、「x が増える」というのは、「右へ行く」ということです。また、「y が増える」というのは、「上へ行く」ということです。ですから、**x が増えるにつれて y も増えれば、右上へ行くことになるので、グラフは右上がりになる**のです。一方、**x が増えるにつれて y が減れば、右下へ行くことになるので、グラフは右下がりになる**のです。このようなものの見方はとても大切です。重要な事実として、まとめておくことにします。

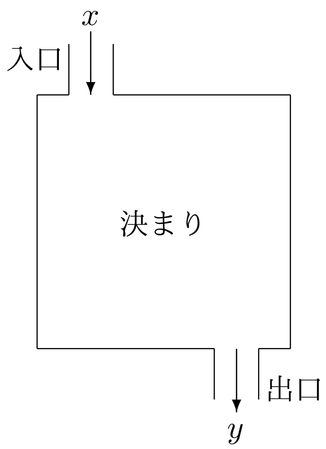
重要な事実：関数の増え方減り方はグラフから読み取れる

(1) 関数のグラフが右上がりになっている所では、x が増えると y も増えていきます。

(2) 関数のグラフが右下がりになっている所では、x が増えると y は減っていきます。

さて、ここまでの学習で、関数についての一般的な話は終わりです。そこでこれからは、色々な関数を種類に分けて学ぶことにします。

1.5　中学校で学ぶ関数の種類



関数とひとことで言っても色々なものがあります。そして、それぞれの関数にはそれぞれの特徴があります。

関数とは、右の図のような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでした。もちろん「決まり」には色々なものがあるわけです。そこで、「決まり」をいくつかの種類に分けて考えるのです。そしてそれぞれの関数の特徴を調べていくのです。中学校では次の 4 種類の関数を学びます。

- 「入口から入れた数をナントカ倍して出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「比例」と呼びます。
- 「ある数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「反比例」と呼びます。
- 「入口から入れた数をナントカ倍してさらにある数をたして出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「1 次関数」と呼びます。
- 「入口から入れた数を 2 乗してさらにナントカ倍して出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「x の 2 乗に比例する関数」と呼びます。

中学校ではこの 4 種類の関数を順番に学ぶことになっていますが、このテキストではこの 4 種類のうち、「比例」と「反比例」を学びます。残りの「1 次関数」と「x の 2 乗に比例する関数については別のテキストで学ぶことにします。

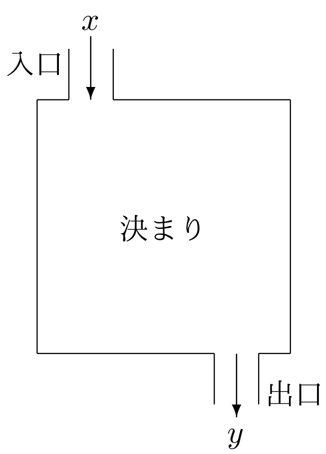
第2章

比例

これから、「比例」と呼ばれている関数のことを考えることにします。

ではまず、そもそも関数とはどんなもののことであったか、ここで簡単に思い出しておきましょう。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでした。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでしたね。

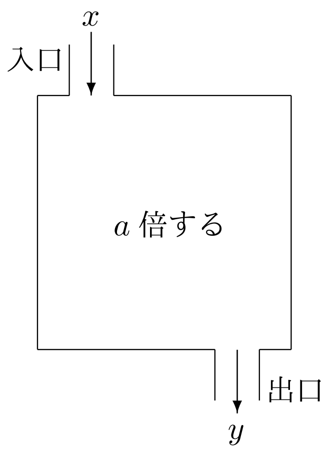


2.1　比例っていったい何？

それではいよいよ、比例の学習に入ることにします。

まず、ある数を 1 つ決めておきます。今、この数を a という文字で表しておきましょう。ここで、次のような「決まり」を考えることにします。

「決まり」: 入口から入れた数を a 倍して出口から出す



このような「決まり」のことを**比例**と呼んでいます。

例 14　「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の仲間です。この関数では、入口から 5 を入れると、出口から 10 が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から -6 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $2x$ が出てきます。出口から出てくる数を y と呼ぶのですから、この関数を数式で表すと、

$$y = 2x$$

となります。

例 15　「入口から入れた数を -3 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の仲間です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から -12 が出てきます。また、入口から -7 を入れると、出口から 21 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $-3x$ が出てきます。出口から出てくる数を y と呼ぶのですから、この関数を数式で表すと、

$$y = -3x$$

となります。

例 16　「入口から入れた数を 2 倍してさらに 1 をたして出口から出す」という「決まり」の関数は比例の仲間ではありません。さらに 1 をたしたので、比例の仲間ではないのです。2 倍するところでやめておけば比例の仲間だったのです。この関数は、比例の仲間ではありませんが、この関数を数式で表すと、

$$y = 2x + 1$$

となります。

問 24. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を $\frac{1}{2}$ 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の $\boxed{}$ です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{}$ が出てきます。また、入口から -7 を入れると、出口から $\boxed{}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{}$$

となります。 答えを見る

問 25. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を -2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の $\boxed{}$ です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から $\boxed{}$ が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から $\boxed{}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{}$$

となります。 答えを見る

問 26. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 2 をひいて出口から出す」という「決まり」の関

数は比例の $\boxed{\quad\quad}$ では $\boxed{\quad\quad\quad}$ せん。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{\quad}$ が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から $\boxed{\quad}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{\quad\quad}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

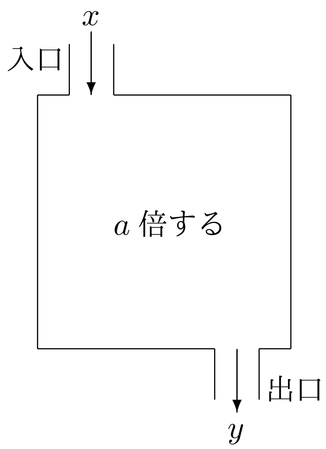
$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

となります。

答えを見る

問 27. 右の図を見てください。いくつとは言いませんが、a は、ある決まった数とします。この図のように、比例とは、「入口から入れた数を a 倍して出口から出す」という「決まり」の関数でしたね。

この関数を数式で表してください。



答えを見る

それではここで、まとめをしておきましょう。

そもそも比例とは、どんな関数のこと？

(1) 1 つの数 a を決めておいて、「入口から入れたを a 倍して出口から出す」という「決まり」を考えることにします。このような「決まり」の関数を「比例」と呼んでいます。

(2) 1 つの数 a を決めておいて、$y = ax$ という数式で表される「決まり」を考えます。このような「決まり」の関数を「比例」と呼んでいます。

問 28. 次の関数の中から、「比例」を選びなさい。

① $y = 3x$　　② $y = 3x^2$

③ $y = -\dfrac{1}{2}x$　　　　④ $y = \dfrac{3}{x}$

⑤ $y = 3x - 1$　　　　⑥ $y = -\dfrac{2}{x}$

答えを見る

それではここで、これから使われる用語と言い回しの説明をします。

比例定数って何？

$y = ax$ という数式で表される関数のことを「比例」と呼ぶのでしたね。この式の中に現れる a という数を、この関数の**比例定数**と呼びます。つまり、「入口から入れた数をナントカ倍する」ときの「ナントカ」が比例定数です。

問 29. 次の関数はどれも、どう見ても比例の仲間です。それぞれの関数の、比例定数を答えなさい。

(1) $y = -2x$　　(2) $y = \dfrac{1}{3}x$　　(3) $y = 5x$

答えを見る

「〜は・・・に比例する」ってどういう意味？

「入口から入れた数を a 倍して出口から出す」という関数では、入口から入れた数 x と出口から出てくる数 y の間には、いつも $y = ax$ という関係が成り立っています。このようなとき、よく、**y は x に比例する**といったりします。つまり、「 y は x に比例する」と書いてあったら、「出口から出てくる y は、いつも、入口から入れた x のナントカ倍（決まったカズ倍）になっている」という意味です。

例題 3　ある関数があるとします。この関数では、y は x に比例していて、$x = -2$ のとき、$y = 8$ になります。この関数の比例定数を求めてください。また、この関数の「決まり」を数式で表してください。

解答

この関数では、y は x に比例するのですよね。ということは、この関数では、いつも y は x のナントカ倍になっているということですね。つまり、何か、ある数 a があって、

$$y = ax \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

と表されるということになります。a がいくつなのかは、今の所わかりません。しかし、問題にはまだ手がかりが書いてあります。$x = -2$ のとき、$y = 8$ になる ということですから、①式で x を 2 にすると、y として 8 が出てくることになります。つまり、

$$8 = a \times (-2)$$

となっているはずです。この式を使えば、謎の数 a を求めることができますね。まず、左と右を入れかえて、

$$a \times (-2) = 8$$

とします。かけざんのマークをやめると、

$$-2a = 8$$

ということですね。

次に左と右を -2 でわると、

$$a = -4$$

となります。これで、謎の数 a の正体がわかりました。これが比例定数ですよね。つまり、比例定数は -4 だったのです。

a の正体がわかったので、この関数の決まりを表す式も、もうわかりますね。つまり、①式の a は -4 であるということなので、答えはもちろん、

$$y = -4x$$

ですよね。

問 30. ある関数があるとします。この関数では、y は x に比例していて、$x=3$ のとき、$y=-18$ になります。以下の問いに答えなさい。

(1) この関数の決まりを式で表しなさい。

(2) この関数では、$x=4$ のとき、y はいくつになりますか。

(3) この関数で $y=30$ となるのは、x がいくつのときですか。

(4) この関数の x の変域が $-2 \leqq x \leqq 5$ のとき、y の変域はどうなりますか。

答えを見る

2.2　比例の性質

比例と呼ばれている関数には面白い性質があります。例を使って説明することにしましょう。

例 17　「$y=3x$」という「比例」を使って、どんな性質があるか考えることにします。

まず、次の表の空欄を埋めて、「比例 $y=3x$ の表」を完成してください。

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$														$\cdots$

表ができたら、次の質問に答えてください。

質問:「比例 $y=3x$ の表」をよく見てほしいのですが、x の値が、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、それぞれの x に対応している y の値はどんなふうになっていきますか？

さて、表はちゃんとできましたか？また、質問の意味はわかりましたか？これからゆっくり説明することにします。

まず、「比例 $y=3x$ の表」ですが、次のようになったはずです。

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	$\cdots$

あなたが作った表と比べてくださいね。あなたの表と同じになっていましたか？

次にあなたは質問を受けましたよね。ところでその質問ですが、「x の値が、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと」とありましたね。これ、どういう意味かわかりましたか？詳しく説明しましょう。

まず何か 1 つ「スタートの数」を決めます。そうですねぇ。最初ですから、1 という数にしておきましょう。1 つ「スタートの数」を決めたら、その数を 2 倍した数、3 倍した数、4 倍した数 $\cdots$ を作るのです。今、スタートの数を 1 にしたのですから、2 倍した数、3 倍した数、4 倍した数 $\cdots$ を作ると、2、3、4 $\cdots$ ができますね。

今度は、例えばスタートの数を -2 にして考えてみましょう。そうするとこの数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ していくので、x は -4、-6、-8 $\cdots$ と変ることになります。

もちろん、このほかにも、いくらでも「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」があります。そして、「こんなことをすると、出口から出てくる y はどんな風に変わっていくの？」というのが質問なのでしたね。これで質問の意味がわかったと思います。では、表を見て考えることにしましょう。

まず、「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」として、例えば、スタートの数を 1 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は 1 から始まり、2、3、4 $\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっているでしょうか？表をよく見てください。y は 3 から始まり、6、9、12 $\cdots$ と変わっていきますよね。ちょっと考えてみればわかりますが、y は 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変わっていっていることになりますね。

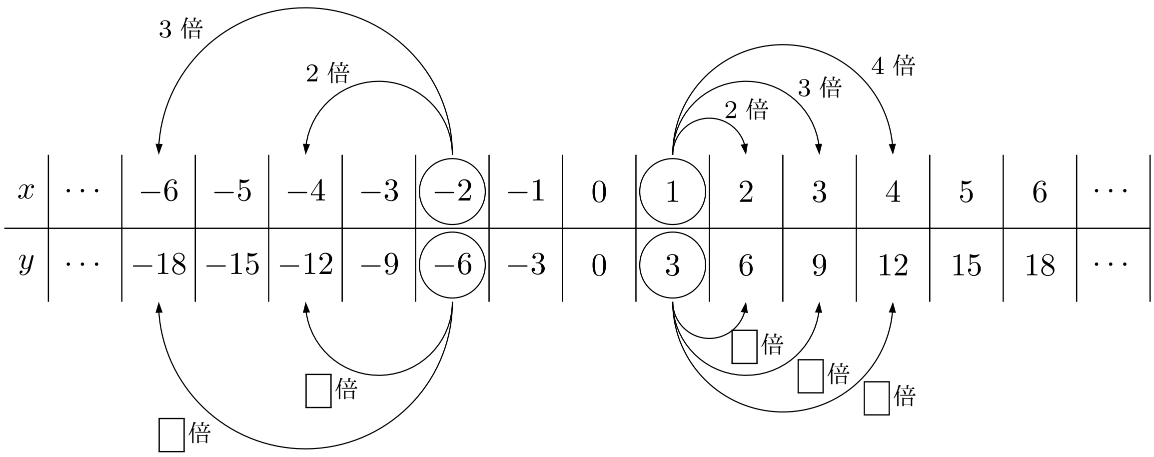
今度は、「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」として、例えば、スタートの数を -1 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は -1 から始まり、-2、-3、-4 $\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっ

ているでしょうか？表をよく見てください。y は -3 から始まり、-6、-9、$-12\cdots$ と変わっていきますよね。ちょっと考えてみればわかりますが、y は 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変わっていっていることになりますね。

最後に、「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」として、例えば、スタートの数を -2 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は -2 から始まり、-4、-6、-8、$\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっているでしょうか？表をはみ出てしまうのですが、ちょっと計算すれば、y は -6 から始まり、-12、-18、$-24\cdots$ と変わることがわかるでしょう。ですから、やはり、y も、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変わっています。

ここまで見てきたことを、整理するために、次の表の空欄を埋めてみてください。

比例 $y = 3x$ の表



x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	$\cdots$

これまでいろいろ調べたことから想像できると思いますが、実は、比例の仲間である「関数 $y = 3x$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こるのです。

問 31. 次の関数の表を作りなさい。表ができたら、その表をよく見て、x の値が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、対応する y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのかどうか調べなさい。さらに、その関数は、比例の仲間なのか仲間でないのか判定しなさい。

(1) $y = -2x$　(2) $y = -2x + 1$　(3) $y = 2x^2$

(4) $y = -\dfrac{1}{2}x$　(5) $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$　(6) $y = \dfrac{1}{2}x^2$

答えを見る

ここまで自分の頭を使って考えてきた人は、次のことが納得できたと思います。

重要な事実：比例と呼ばれる関数の性質

比例と呼ばれる関数では、x の値をとにかく 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変えていくと、対応する y の値も必ず 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ になっていく。

2.3　比例のグラフとその特徴

比例とは、$y = ax$ という形の式で表される関数のことでした。ですから、例えば、

① $y = x$　② $y = 2x$　③ $y = 3x$　④ $y = -x$

⑤ $y = -2x$　⑥ $y = -3x$　⑦ $y = \dfrac{1}{2}x$　⑧ $y = -\dfrac{1}{2}x$

は、全て比例の仲間です。ところで、これらのグラフを作るとどんな形のものができるのでしょうか。関数のグラフの作り方は、このテキストの 35 ページ、「1.4 関数のグラフ」で詳しく学びましたね。忘れてしまった人は今すぐおさらいをしてください。では、次の問で、あなたにグラフを作ってもらうことにしましょう。

問 32. 式の形を見るとわかるはずですが、次の関数は全て比例の仲間です。

① $y = x$　② $y = 2x$　③ $y = 3x$　④ $y = -x$

⑤ $y = -2x$　⑥ $y = -3x$　⑦ $y = \dfrac{1}{2}x$　⑧ $y = -\dfrac{1}{2}x$

このテキストの 35 ページ、「1.4 関数のグラフ」で学んだ方法でこれらの関数のグラフを作りなさい。グラフができたら、グラフをよく見て、どんな特徴があるのか気づいたことを文にしなさい。 答えを見る

問 33. 前の問 32 に出てくる比例についての質問です。

(1) 前の問 32 で作ったグラフを見て考えてください。x が増えると y が必ず増えるものを番号で答えなさい。

(2) 前の問 32 で作ったグラフを見て考えてください。x が増えると y が必ず減るものを番号で答えなさい。

(3) 比例には、「x が増えると y が必ず増えるもの」と「x が増えると y が必ず減るもの」があるようですね。グラフを見ないで、式を見るだけで、どっちなのか判断する方法はあるでしょうか。 答えを見る

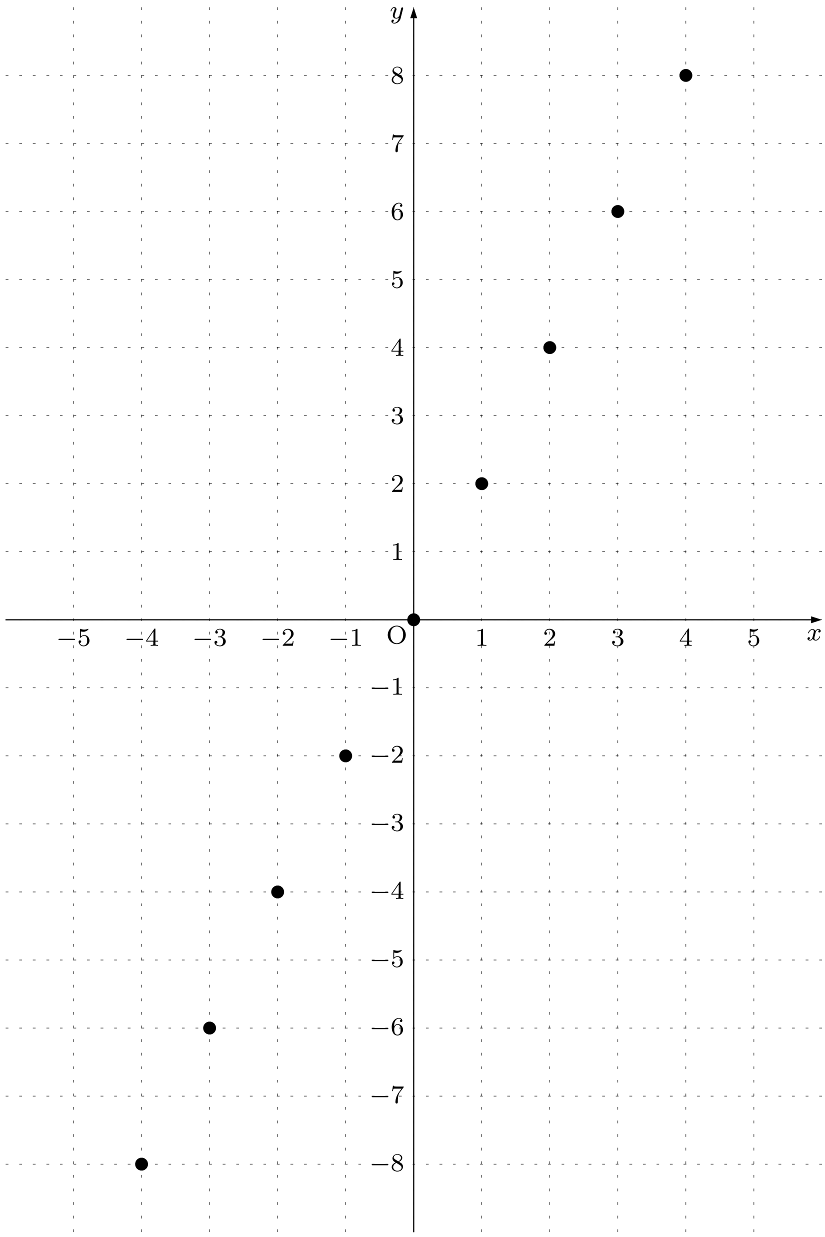
さて、どうでしたか？関数のグラフの作り方はこのテキストの 35 ページ、「1.4 関数のグラフ」で詳しく学習しているので、いまさらあなたに教えること何もはありません。そうは言っても「グラフってどう描くんだっけ。忘れちゃった。」なんていっている人もいるかもしれませんね。そこで、念のため、さっきの問 32 に出てくる関数を 2 つ例にとって、簡単に説明しておくことにしましょう。

例 18 比例 $y = 2x$ のグラフとその特徴

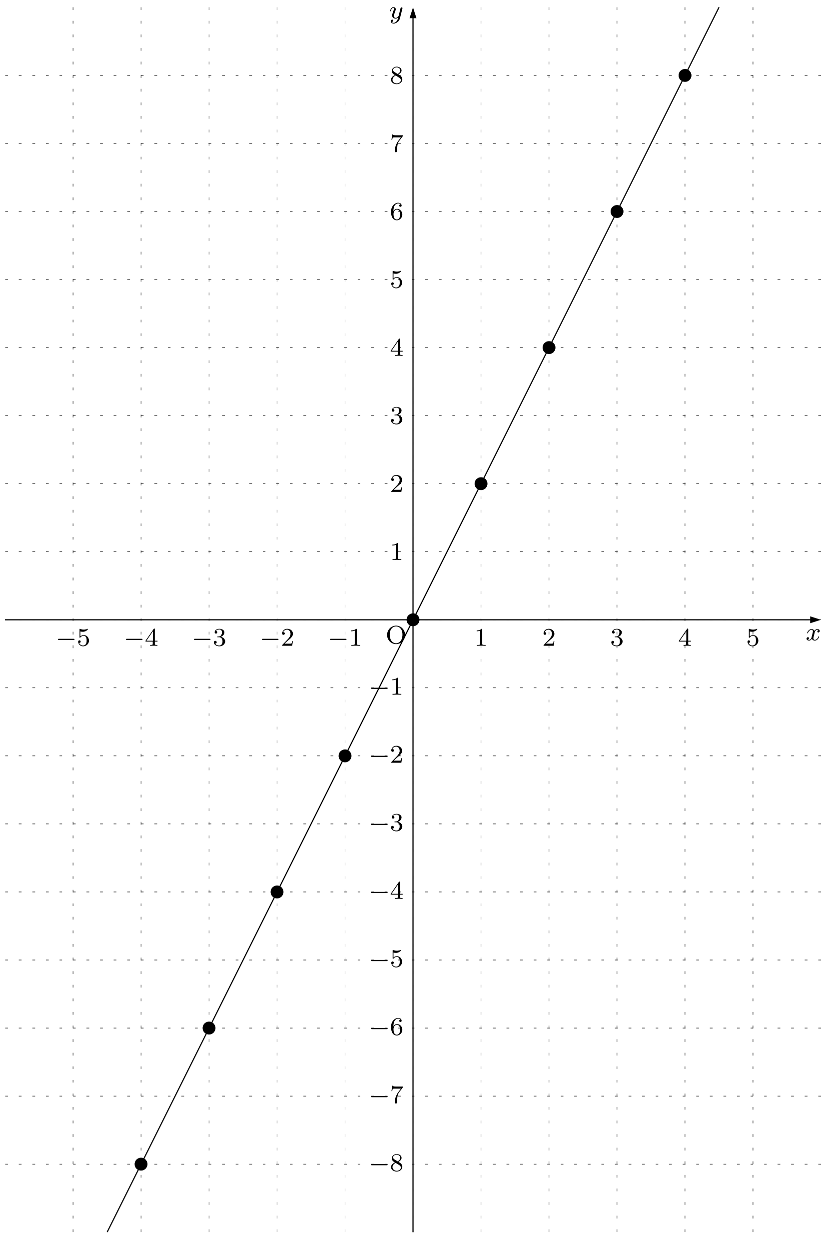
関数のグラフを作るには、まず準備として、「関数の表」を作るのでしたね。ここでは、x の範囲を -4 ぐらいから 4 ぐらいまでにして調べることにします。また、x は 1 きざみで変えて調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	$\cdots$

次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのでしたね。そうすると次のようになるはずです。



次は、今打たれた点たちの間を「本当らしく」結びます。そのためには、最初に作った表と、今打った点もよく見るだけではなく、「もし 1 きざみではなくて、もっともっと細かく調べていたらさらにどこに点が出てくるのだろう」と想像するのです。そして、「そうか、点と点の間はこうなるんだ！」と悟れたら、点たちの間をあなたの考えに従って結びます。すると今の場合、次のようになりますよね。



これで、比例 $y = 2x$ のグラフが完成しました。でもこれで終わりではありませんね。たしか、グラフができたら、「どんな特徴があるのか考えてくれ」と言われてましたね。では、今作ったグラフを見て考えることにしましょう。まぁ、人によって気づくことは色々なのですが、ここであなたに気づいてほしいのは次のようなことです。

- 比例 $y = 2x$ のグラフは直線になる。
- 比例 $y = 2x$ のグラフは原点 $(0,\ 0)$ を通っている。
- 比例 $y = 2x$ のグラフは全体的に右上がりである。ということは、この関数では、x

が増えれば y も必ず増えるということである。

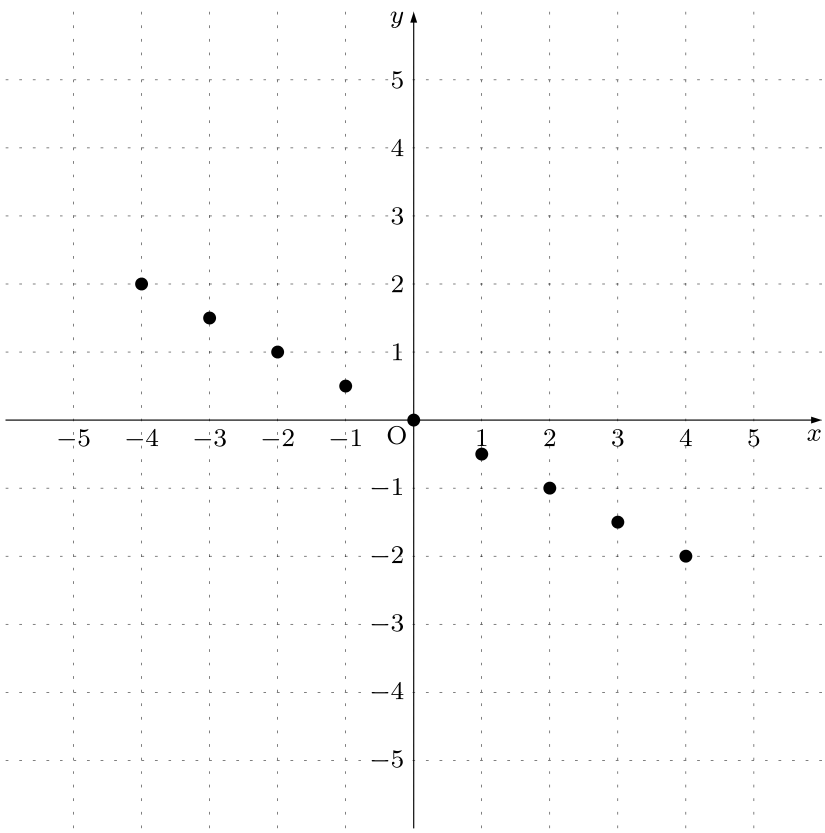
どうですか？どんな特徴があるかわかってもらえましたか？

例 19　比例 $y=-\dfrac{1}{2}x$ のグラフとその特徴

関数のグラフを作るには、まず準備として、「関数の表」を作るのでしたね。ここでは、x の範囲を -4 ぐらいから 4 ぐらいまでにして調べることにします。また、x は 1 きざみで変えて調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。

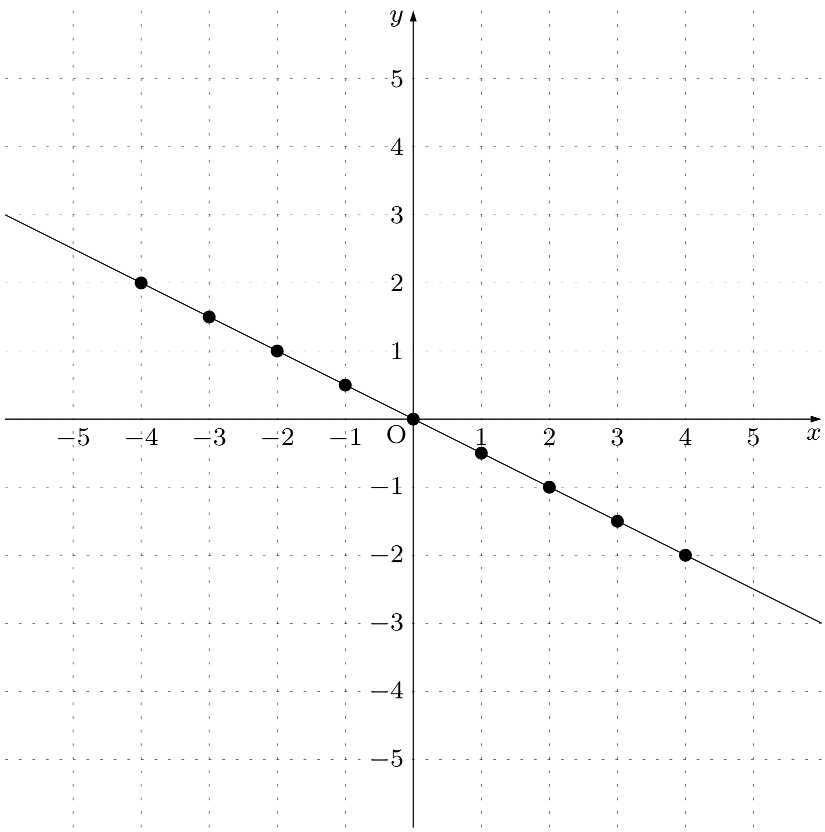
x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	$\cdots$

次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのでしたね。そうすると次のようになるはずです。



次は、今打たれた点たちの間を「本当らしく」結びます。そのためには、最初に作った

表と、今打った点もよく見るだけではなく、「もし 1 きざみではなくて、もっともっと細かく調べていたらさらにどこに点が出てくるのだろう」と想像するのです。そして、「そうか、点と点の間はこうなるんだ！」と悟れたら、点たちの間をあなたの考えに従って結びます。すると今の場合、次のようになりますよね。



これで、比例 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフが完成しました。でもこれで終わりではありませんね。たしか、グラフができたら、「どんな特徴があるのか考えてくれ」と言われてましたね。では、今作ったグラフを見て考えることにしましょう。まぁ、人によって気づくことは色々なのですが、ここであなたに気づいてほしいのは次のようなことです。

- 比例 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフは直線になる。
- 比例 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフは原点 $(0,\ 0)$ を通っている。
- 比例 $y = -\dfrac{1}{2}x$ のグラフは全体的に右上がりである。ということは、この関数では、x が増えれば y は必ず減るということである。

どうですか？どんな特徴があるかわかってもらえましたか？

さて、ここまでいくつかの問を考えてもらい、さらに、問に出てきた 2 つの比例について、グラフや特徴を学びました。ここまで考えてきたことをまとめておきましょう。自分の頭を使って考えてきた人は次のことがわかったと思います。

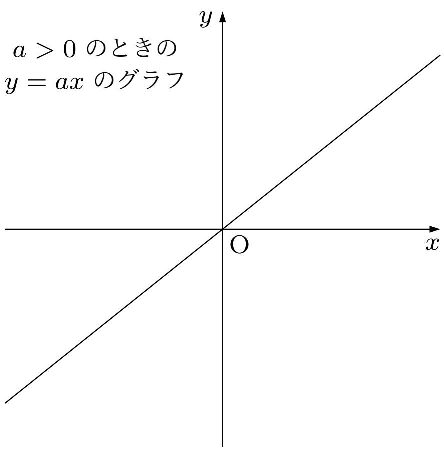
重要な事実：比例のグラフの特徴

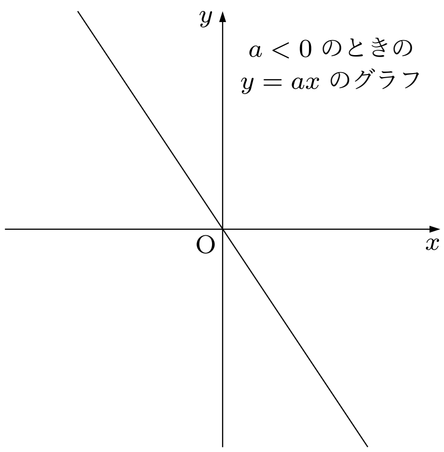
(1) 比例 $y = ax$ のグラフは、必ず直線になる。

(2) 比例 $y = ax$ のグラフは、必ず原点 $(0, 0)$ を通る。

(3) a がプラスの数のとき、比例 $y = ax$ のグラフは、必ず右上がりの直線になる。

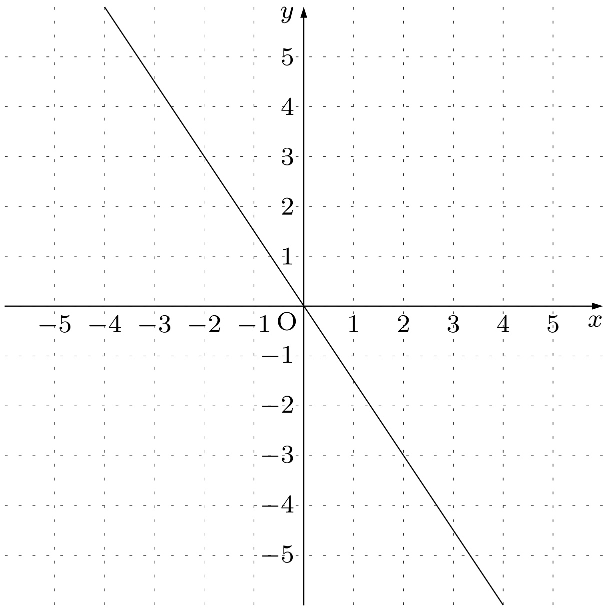
(4) a がマイナスの数のとき、比例 $y = ax$ のグラフは、必ず右下がりの直線になる。





グラフの特徴がわかったので、今度は、グラフから式を当てる練習をしましょう。

例題 4　右の図は、ある関数のグラフを描いたものです。この関数の決まりを表す式はどんな式ですか。



解答

この関数のグラフはどう見ても直線ですね。また、どう見ても、原点（つまり x が 0 で y も 0 の所）を通っています。ですから、この関数は「比例」の仲間ですね。

「比例」は必ず、

$$y = ax$$

という形の数式です。ですから、あと a がいくつなのかわかれば式は完成です。しかし今の所、a がいくつなのかわかりません。そこで、グラフを見て、何か良い手ががりはないか探してみましょう。例えば、よく見ると、グラフは x が 2 で y が -3 の所を通っていることがわかります。(つまり、座標が $(2, -3)$ である点を通っています。) ということは、この関数では、x に 2 を入れると、y として -3 が出てくるということですね。ですからさっきの $y = ax$ という式で、x を 2 にして、y を -3 にしてみましょう。すると、

$$-3 = a \times 2$$

となりますよね。この式を使えば、謎の数 a の正体がわかりますよね。まず、左と右を入れかえて、

$$a \times 2 = -3$$

となりますね。かけ算のマークをやめると、

$$2a = -3$$

ということですね。次は、左と右を 2 でわりましょう。そうすると、

$$a = -\frac{3}{2}$$

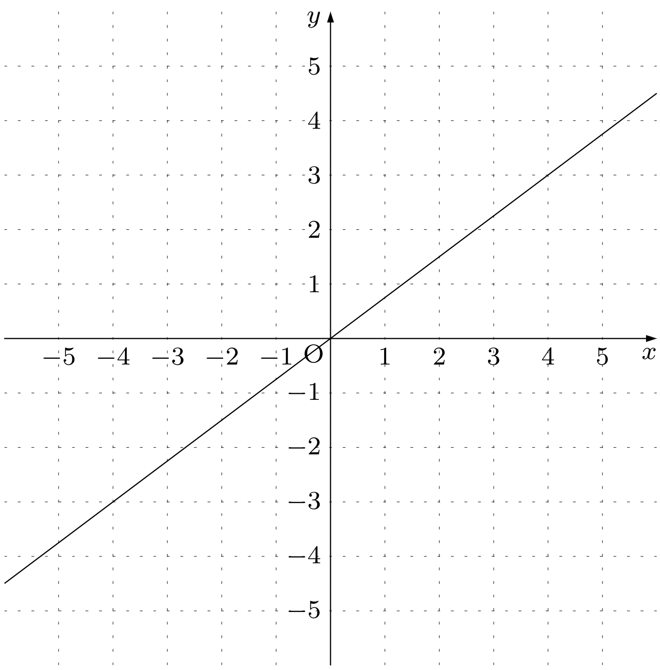
ですね。

この関数は「比例」の仲間なので、この関数の式は $y = ax$ という形をしているということでしたね。そして今、a の正体がわかったのですね。ですから、この関数の式もわかります。もちろん

$$y = -\frac{3}{2}x$$

ですね。

問 34. 右の図は、ある関数のグラフを描いたものです。この関数の決まりを表す式はどんな式ですか。



答えを見る

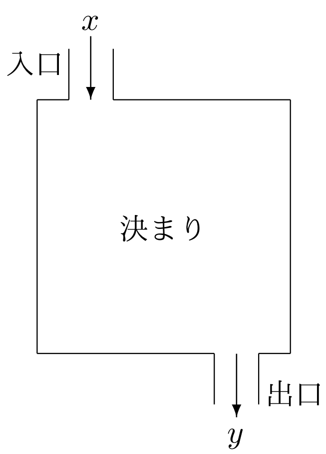
第3章

反比例

　これから、「反比例」と呼ばれている関数のことを考えることにします。

　ではまず、そもそも関数とはどんなもののことであったか、ここで簡単に思い出しておきましょう。

　右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでした。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでしたね。

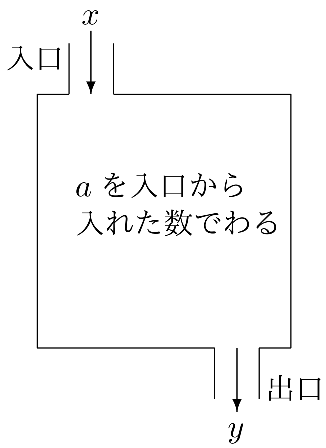


3.1　反比例っていったい何？

　それではいよいよ、反比例の学習に入ることにします。

　まず、ある数を 1 つ決めておきます。今、この数を a という文字で表しておきましょう。ここで、次のような「決まり」を考えることにします。

「決まり」: a という数を、入口から入れた数でわって出口から出す



この「決まり」のことを**反比例**と呼んでいます。

例 20　「6 という数を入口から入れた数でわり出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の仲間です。この関数では、入口から 2 を入れると、出口から 3 が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から -2 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\dfrac{6}{x}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = \frac{6}{x}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から 0 を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も 0 でわることはできないからです。ですから、x が 0 のときの y は存在しないのです。

例 21　「-6 という数を入口から入れた数でわり出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の仲間です。この関数では、入口から -1 を入れると、出口から 6 が出てきます。また、入口から 5 を入れると、出口から -1.2 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $-\dfrac{6}{x}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = -\frac{6}{x}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から 0 を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も 0 でわることはできないからです。ですから、x が 0 のときの y は存在しないのです。

問 35. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「12 という数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の $\boxed{\quad\quad}$ です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{\quad}$ が出てきます。また、入口から -6 を入れると、出口から $\boxed{\quad\quad}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{\quad\quad}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から $\boxed{\quad}$ を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も 0 でわることはできないからです。ですから、x が $\boxed{\quad}$ のときの y は存在しないのです。

答えを見る

問 36. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「-2 という数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の $\boxed{\quad\quad}$ です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から $\boxed{\quad\quad}$ が出てきます。また、入口から -4 を入れると、出口から $\boxed{\quad\quad}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{\quad}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から 0 を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も $\boxed{\quad}$ でわることはできないか

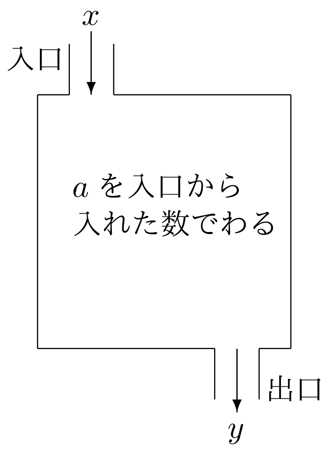
らです。ですから、x が $\boxed{}$ のときの y は存在しないのです。

答えを見る

問 37. 右の図を見てください。

いくつとは言いませんが、a は、ある決まった数とします。この図のように、反比例とは、「a という数を入口から入れたでわって出口から出す」という「決まり」の関数でしたね。

この関数を数式で表してください。



答えを見る

それではここで、まとめをしておきましょう。

そもそも反比例とは、どんな関数のこと？

(1) 1 つの数 a を決めておきます。そして、「a という数を入口から入れたでわって出口から出す」という「決まり」を考えることにします。このような「決まり」の関数を「反比例」と呼んでいます。

(2) 1 つの数 a を決めておいて、$y = \dfrac{a}{x}$ という数式で表される「決まり」を考えます。このような「決まり」の関数を「反比例」と呼んでいます。

問 38. 次の関数の中から、「反比例」を選びなさい。

① $y = \dfrac{1}{x}$　　② $y = \dfrac{6}{x}$

③ $y = 6x$　　④ $y = -\dfrac{1}{x}$

⑤ $y = 2x^2$　　⑥ $y = -\dfrac{4}{x}$

⑦ $y = x + 1$　　⑧ $y = \dfrac{1}{2}x$

答えを見る

それでは次に、これから使われる用語と言い回しの説明をします。

比例定数って何？

$y = \dfrac{a}{x}$ という数式で表される関数のことを「反比例」と呼ぶのでしたね。この式の中に現れる a という数を、この関数の**比例定数**と呼びます（反比例定数とは呼ばないようです。まぎらわしいですね。）。つまり、「ナントカという数を入口から入れたでわる」ときの「ナントカ」が比例定数です。

問 39. 次の関数はどれも、どう見ても反比例の仲間です。それぞれの関数の比例定数を答えなさい。

(1) $y = \dfrac{1}{x}$　　(2) $y = -\dfrac{2}{x}$　　(3) $y = -\dfrac{1}{x}$　　(4) $y = \dfrac{6}{x}$

答えを見る

「〜は・・・に反比例する」ってどういう意味？

「a という数を入口から入れた数でわって出口から出す」という関数では、入口から入れた数 x と出口から出てくる数 y は、いつも $y = \dfrac{a}{x}$ という関係が成り立っています。このような時、よく、**y は x に反比例する**といったりします。つまり、「y は x に反比例する」と書いてあったら、「出口から出てくる y は、いつも、ある決められた数を入口から入れた x でわったものになっている」という意味です。

例題 5　ある関数があるとします。この関数では、y は x に反比例していて、$x = -3$ のとき、$y = -8$ になります。この関数の比例定数を求めてください。また、この関数の「決まり」を数式で表してください。

解答

この関数では、y は x に反比例するのですよね。ということは、この関数では、いつも y はある数を x でわったものになっているということですね。つまり、何か、ある数 a があって、

$$y = \frac{a}{x} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表されるということになります。a がいくつなのかは、今の所わかりません。しかし、問題には、まだ手がかりが書いてあります。$x = -3$ のとき、$y = -8$ になる ということですから、①式で x を -3 にすると、y として -8 が出てくることになります。つまり、

$$-8 = \frac{a}{-3}$$

となっているはずです。この式を使えば、謎の数 a を求めることができますね。まず、左と右を入れかえて、

$$\frac{a}{-3} = -8$$

とします。

次に左と右に -3 をかけると、

$$a = 24$$

となります。これで、謎の数 a の正体がわかりました。これが比例定数ですよね。つまり、比例定数は 24 だったのです。

a の正体がわかったので、この関数の決まりを表す式も、もうわかりますね。つまり、①式の a は 24 であるということなので、答えはもちろん、もちろん、

$$y = \frac{24}{x}$$

ですよね。

問 40. ある関数があるとします。この関数では、y は x に反比例していて、$x = 4$ のとき、$y = 3$ になります。以下の問いに答えなさい。

(1) この関数の決まりを式で表しなさい。

(2) この関数では、$x = -2$ のとき、y はいくつになりますか。

(3) この関数で $y = -4$ となるのは、x がいくつのときですか。

(4) この関数の x の変域が $2 \leqq x \leqq 12$ のとき、y の変域はどうなりますか。

答えを見る

3.2　反比例の性質

反比例と呼ばれている関数には、面白い性質があります。例を使って説明することにしましょう。

例 22　「$y=\dfrac{18}{x}$」という「反比例」を使って、どんな性質があるか考えることにします。
まず、次の表の空欄を埋めて、「反比例 $y=\dfrac{18}{x}$ の表」を完成してください。

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
y	$\cdots$																		$\cdots$

表ができたら、次の質問に答えてください。

質問 1 :「反比例 $y=\dfrac{18}{x}$ の表」をよく見てほしいのですが、x の値が、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、それぞれの x に対応している y の値はどんなふうになっていきますか？

質問 2 : x の値とそれに対応する y の値をかけるとどうなりますか？

さて、表はちゃんとできましたか？また、質問の意味はわかりましたか？これからゆっくり説明することにします。

「反比例 $y=\dfrac{18}{x}$ の表」は次のようになったはずです。

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{18}{7}$	-3	$-\frac{18}{5}$	$-\frac{9}{2}$	-6	-9	-18	$\times$	18	9	6	$\frac{9}{2}$	$\frac{18}{5}$	3	$\frac{18}{7}$	$\frac{9}{4}$	$\cdots$

あなたが作った表と比べてくださいね。あなたの表と同じになっていましたか？

あなたは、次に質問を受けたのですよね。

まず質問 1 ですが、「x の値が、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと」とありましたね。これ、どういう意味かわかりましたか？詳しく説明しましょう。

まず何か 1 つ「スタートの数」を決めます。そうですねぇ。最初ですから、1 という数にしておきましょう。1 つ「スタートの数」を決めたら、その数を 2 倍した数、3 倍した数、4 倍した数 $\cdots$ を作るのです。今、スタートの数を 1 にしたのですから、2 倍した数、3 倍した数、4 倍した数 $\cdots$ を作ると、2、3、4 $\cdots$ ができますね。

今度は、スタートの数を -2 として考えてみましょう。そうするとこの数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ していくので、x は -4、-6、-8 $\cdots$ と変ることになります。

もちろん、このほかにも、いくらでも「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法があります。そして、「こんなことをすると、出口から出てくる y はどんな風に変わっていくの？」というのが質問なのでしたね。これで、質問の意味がわかったと思います。では、表を見て考えることにしましょう。

まず「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」として、スタートの数を 1 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は 1 から始まり、2、3、4 $\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっているでしょうか？表をよく見てください。y は 18 から始まり、9、6、$\dfrac{9}{2}$ $\cdots$ と変わっていきます。よく考えてくださいね。これって、スタートの 18 と比べると、まず $\dfrac{1}{2}$ 倍の 9、次に $\dfrac{1}{3}$ 倍の 6、その次に $\dfrac{1}{4}$ 倍の $\dfrac{9}{2}\cdots$ と変わっていってますよね。つまり、y は、$\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ と変わっていっていることになります。

今度は、「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」としてスタートの数を -1 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は -1 から始まり、-2、-3、-4 $\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっているでしょうか？表をよく見てください。y は -18 から始まり、-9、-6、$-\dfrac{9}{2}\cdots$ と変わっていきます。よく考えてくださいね。これって、スタートの -18 と比べると、まず $\dfrac{1}{2}$ 倍の -9、次に $\dfrac{1}{3}$ 倍の -6、その次に $\dfrac{1}{4}$ 倍の $-\dfrac{9}{2}\cdots$ と変わっていってますよね。つまり、こ

のときも、やはり、y は、$\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ と変わっています。

最後に、「x の値を、2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変える方法」として、スタートの数を -2 にした場合を考えてみることにしましょう。そうすると、x は -2 から始まり、-4、-6、-8 $\cdots$ と変ることになります。では、このとき対応する y はどんな風に変わっているでしょうか？表をよく見てください。y は -9 から始まり、$-\dfrac{9}{2}$、-3、$-\dfrac{9}{4}$ $\cdots$ と変わっていきます。よく考えてくださいね。これって、スタートの -9 と比べると、まず $\dfrac{1}{2}$ 倍の $-\dfrac{9}{2}$、次に $\dfrac{1}{3}$ 倍の -3、その次に $\dfrac{1}{4}$ 倍の $-\dfrac{9}{4}$$\cdots$ と変わっていってますよね。つまり、このときも、やはり、y は、$\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ と変わっています。

ここまで見てきたことを、整理するために、次の表の空欄を埋めてみてください。

反比例 $y = \dfrac{18}{x}$ の表

4 倍　3 倍　2 倍　　　　4 倍　3 倍　2 倍

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\dfrac{9}{4}$	$-\dfrac{18}{7}$	-3	$-\dfrac{18}{5}$	$-\dfrac{9}{2}$	-6	-9	-18	$\times$	18	9	6	$\dfrac{9}{2}$	$\cdots$

$\square$倍　$\square$倍　$\square$倍　　　　$\square$倍　$\square$倍　$\square$倍

これまでいろいろ調べたことから想像できると思いますが、実は、反比例の仲間である「関数 $y = \dfrac{18}{x}$」では、スタートの数をいくつにしても、

> 入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こるのです。

質問はもうひとつありました。質問 2 です。どういう質問だったかというと、「x の値とそれに対応する y の値をかけるとどうなりますか？」というものでした。では、表をみて考えることにしましょう。例えば、x が -6 の所を見ると、y は -3 ですから、x の値と y の値をかけると 18 になりますね。ほかでも試して見ましょう。例えば、x が -2 の所を見ると、y は -9 ですから、x の値と y の値をかけるとやはり 18 になります。念のため、ほかでも試して見ます。例えば、x が 4 の所を見ると、y は $\dfrac{9}{2}$ ですから、x の値と y の値をかけると、やっぱり 18 になります。どうも、x の値とそれに対応する y の値をかけると必ず 18 のなるようです。なぜ、こんなことが起きるのでしょうか？ちょっと悩んでみることにしましょう。

そもそも、今考えている関数は「反比例」の仲間で、式は、

$$y = \frac{18}{x}$$

でしたね。ところでこの式は、次のように式変形して見かけを変えることができます。

まず、左と右に x をかけると、とりあえず、

$$y \times x = \frac{18}{x} \times x$$

となります。この式の見かけをマシにすると、

$$xy = 18$$

ってなりますよね。ところで、この式って、「x と y をかけると 18 のなるんだよ！」という意味ではないですか。じゃぁ、x がいくつでも、相手の y とかけ算すれば 18 になっちゃうということですね。これで謎が解けました。

問 41. 次の関数の表を作りなさい。表ができたら、その表をよく見て、x の値が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、対応する y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのかどうか調べなさい。さらに、その関数は、比例の仲間なのか仲間でないのか判定しなさい。

(1) $y = -x$　　(2) $y = -\dfrac{1}{x}$　　(3) $y = 2x + 1$

(4) $y = \dfrac{1}{x}$　　(5) $y = \dfrac{x}{2}$　　(6) $y = x^2$

答えを見る

ここまで自分の頭を使って考えてきた人は、次のことが納得できたと思います。

重要な事実：反比例と呼ばれる関数の性質

(1) 反比例と呼ばれる関数では、x の値をとにかく 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ と変えていくと、対応する y の値は必ず $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ になっていく。

(2) $y = \dfrac{a}{x}$ という式で表される反比例では、x の値とそれに対応する y の値をかけると必ず a という数になる。

3.3　反比例のグラフとその特徴

反比例とは、$y = \dfrac{a}{x}$ という形の式で表される関数のことでした。ですから、例えば、

① $y = \dfrac{1}{x}$　② $y = \dfrac{2}{x}$　③ $y = \dfrac{3}{x}$　④ $y = \dfrac{6}{x}$

⑤ $y = -\dfrac{1}{x}$　⑥ $y = -\dfrac{2}{x}$　⑦ $y = \dfrac{3}{x}$　⑧ $y = -\dfrac{6}{x}$

は、全て反比例の仲間です。ところで、これらのグラフを作るとどんな形のものができるのでしょうか。関数のグラフの作り方は、このテキストの 35 ページ、「1.4 関数のグラフ」で詳しく学びましたね。では、次の問で、あなたにグラフを作ってもらうことにしましょう。

問 42.　このテキストの 35 ページ、「1.4 関数のグラフ」で学んだ方法で次の関数のグラフを作りなさい。グラフができたら、グラフをよく見て、どんな特徴があるのか気づいたことを文にしなさい。

① $y = \dfrac{1}{x}$　② $y = \dfrac{2}{x}$　③ $y = \dfrac{3}{x}$　④ $y = \dfrac{6}{x}$

⑤ $y = -\dfrac{1}{x}$　⑥ $y = -\dfrac{2}{x}$　⑦ $y = \dfrac{3}{x}$　⑧ $y = -\dfrac{6}{x}$

答えを見る

問 43. 前の問 42 に出てくる反比例についての質問です。

(1) ①から⑧のうち、比例定数がプラスのものを選びなさい。

(2) ①から⑧のうち、比例定数がマイナスのものを選びなさい。

(3) 反比例には、比例定数がプラスのものと、マイナスのものがあるわけですが、比例定数がプラスのものと、マイナスの物では、グラフはどのように違っていますか。文で答えなさい。

答えを見る

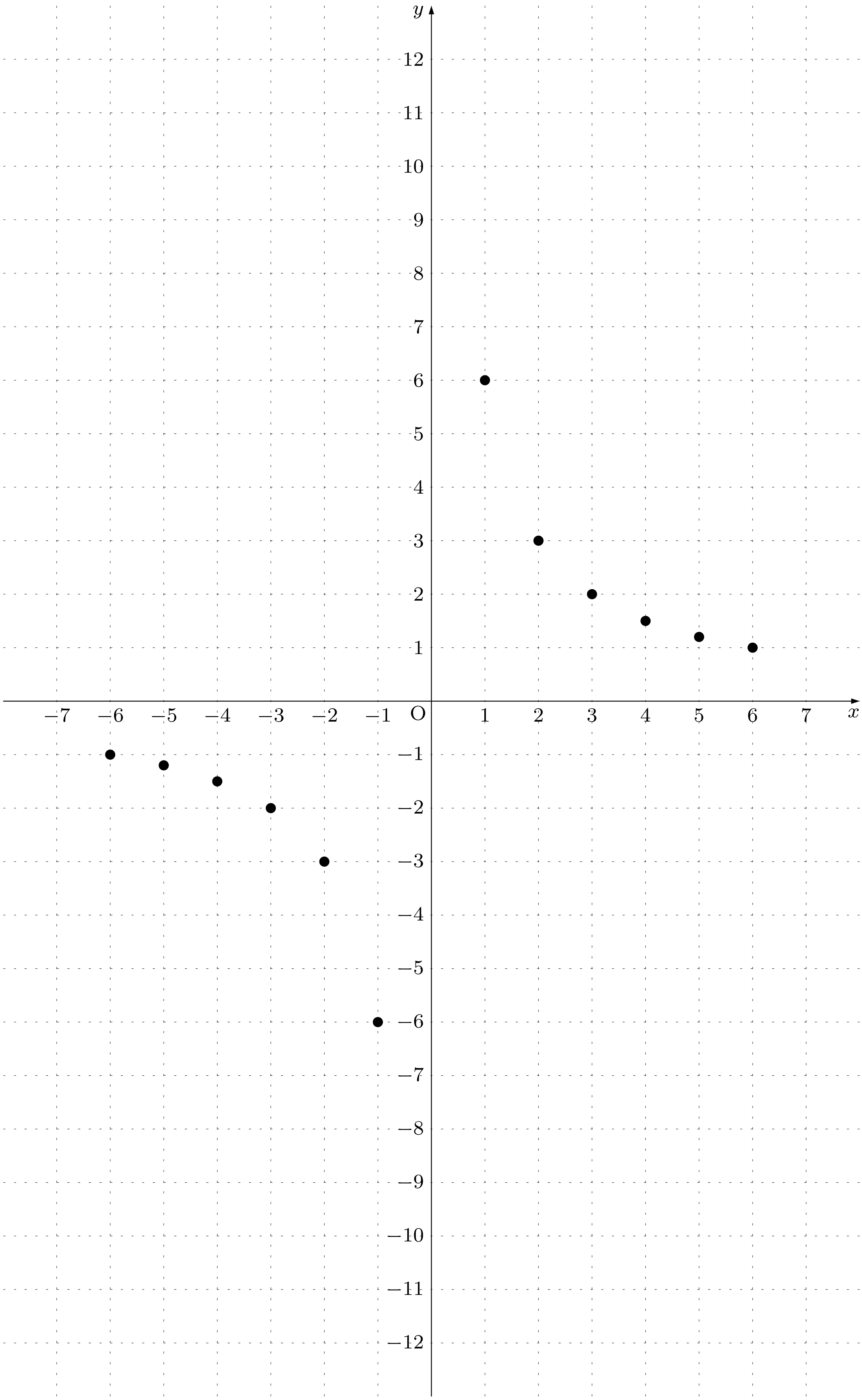
さて、どうでしたか？関数のグラフの作り方は、このテキストの 35 ページの「1.4 関数のグラフ」で詳しく学習しているので、いまさらあなたに教えること何もはありません。そうは言っても「グラフってどう描くんだっけ。忘れちゃった。」なんて言っている人もいるかもしれませんね。そこで、さっきの問 42 に出てくる関数を 2 つ例にとって、簡単に説明しておきましょう。

例 23　反比例 $y = \dfrac{6}{x}$ のグラフとその特徴

関数のグラフを作るには、まず準備として、「関数の表」を作るのでしたね。ここでは x の範囲を -6 ぐらいから 6 ぐらいまでにして調べることにします。また x は 1 きざみで変えて調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-1	-1.2	-1.5	-2	-3	-6	╳	6	3	2	1.5	1.2	1	$\cdots$

次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのでしたね。そうすると次のようになるはずです。



次は、今打たれた点たちの間を「本当らしく」結びます。でも、今打った点の並び方を見ると、ちょっと悩みますね。まっすぐ並んではいませんね。ですから、きっと、点と点の間をまっすぐ結んだらダメですよね。

あと、もうひとつ気になることがあります。あなたもきっと気になってますよね。（まさか「えー、何のこと？」なんて言いませんよね。）表をよく見てください。x が 0 の所には y の値は書いてありません。だってこの関数 $y = \dfrac{6}{x}$ って、入口から 0 を入れてはいけないんですよね。（どうしてダメなのか、いまさら説明しなくても大丈夫ですよね。）

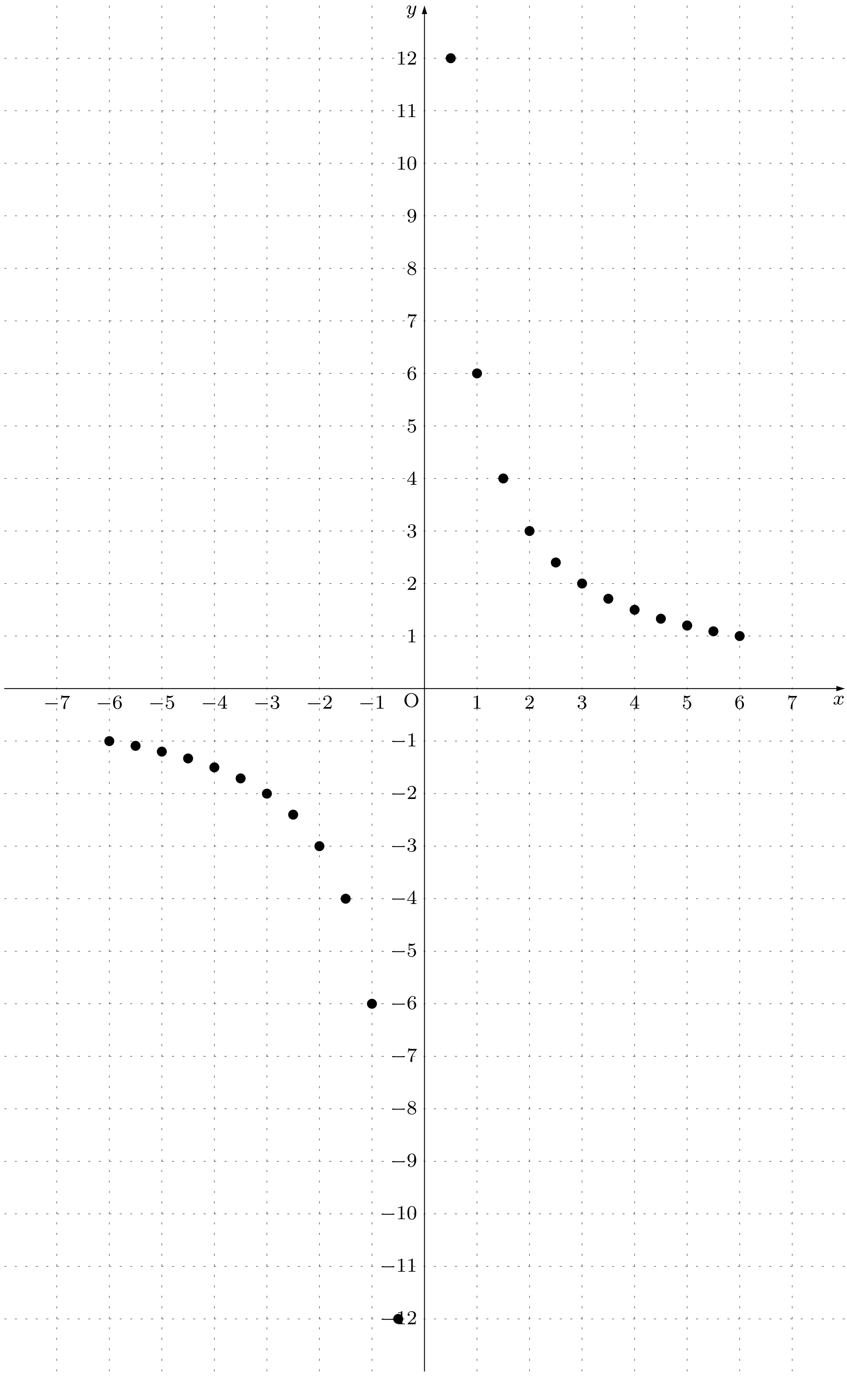
というわけで、座標平面にも「x が 0 になるような点」が打たれることはありませんね。（つまり、y軸の上には 1 つも点はないんですよ。）こういうのって、点を結んでいくとき、結構困りませんか？

いま説明したように、いろいろな心配事があるわけです。ですから、いい加減に点を結んでいくと失敗しそうです。そこで、もっと詳しく調査をしてから、点と点の間を結ぶことにします。ちょっと気合を入れて、x の値を 0.5 きざみで変えて調べてみましょう。そうすると、次のようになります。

x	$\cdots$	-6	-5.5	-5	-4.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0
y	$\cdots$	-1	-1.09 ぐらい	-1.2	-1.33 ぐらい	-1.5	-1.71 ぐらい	-2	-2.4	-3	-4	-6	-12	╳

0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	$\cdots$
╳	12	6	4	3	2.4	2	1.71 ぐらい	1.5	1.33 ぐらい	1.2	1.09 ぐらい	1	$\cdots$

0.5 きざみで調べたので、表が長くなってしまいます。そこで、仕方がないので、x が 0 のところで分けて 2 つの表にしました。それではこの表を見て、座標平面に点を追加しましょう。そうすると次のようになりますね。


y
x
O
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7

どうですか、$y = \dfrac{6}{x}$ のグラフの本当の形が少しわかってきた気がしませんか？でも、まだ気になることがあります。そうです、x が 0 のとき、y はないので y 軸の上には点はないのです。

そこで、y 軸の近くでグラフがどうなるのか、さらに気合をいれて調べてみることにします。今度は、0.1 きざみで調べます。だけど、y 軸の近くを調べたいので、x を 0 に近い数ばかりにして調べることにします。そうですねぇ、ここでは -0.5 から 0.5 の範囲を調べることにしましょうか。そうすると表は次のようになります。

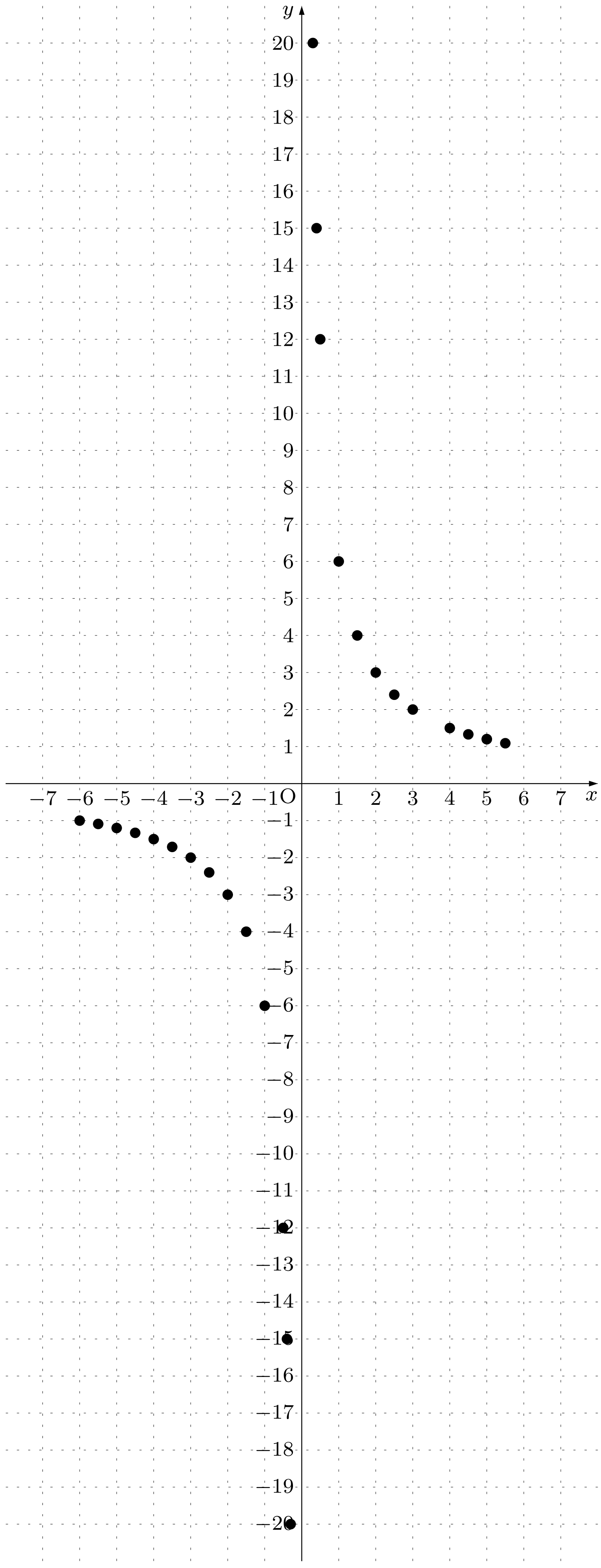
x	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.45	0.5
y	-12	-15	-20	-30	-60	╳	60	30	20	15	12

この表をよく見てくださいね。

x の値が、-0.5、-0.4、-0.3、-0.2、$-0,1 \cdots$ と、マイナスの数のまま 0 に近づいていくと、y の値は、-12、-15、-20、-30、$-60 \cdots$ と変化していきます。y は激しく小さくなっていくわけですね。ということは、y 軸の左側から y 軸に近づいていくと、点たちは、どんどん下のほうに出てくるということになりますね。

また、x の値が、0.5、0.4、0.3、0.2、$0,1 \cdots$ と、プラスの数のまま 0 に近づいていくと、y の値は、12、15、20、30、$60 \cdots$ と変化していきます。y は激しく大きくなっていくわけですね。ということは、y 軸の右側から、y 軸に近づいていくと、点たちは、どんどん上のほうに出てくるということになりますね。

では、今調べた点たちも使って、座標平面に点を追加してみましょう。すると、次のようになります。


y
x
O
20
−20
7
−7

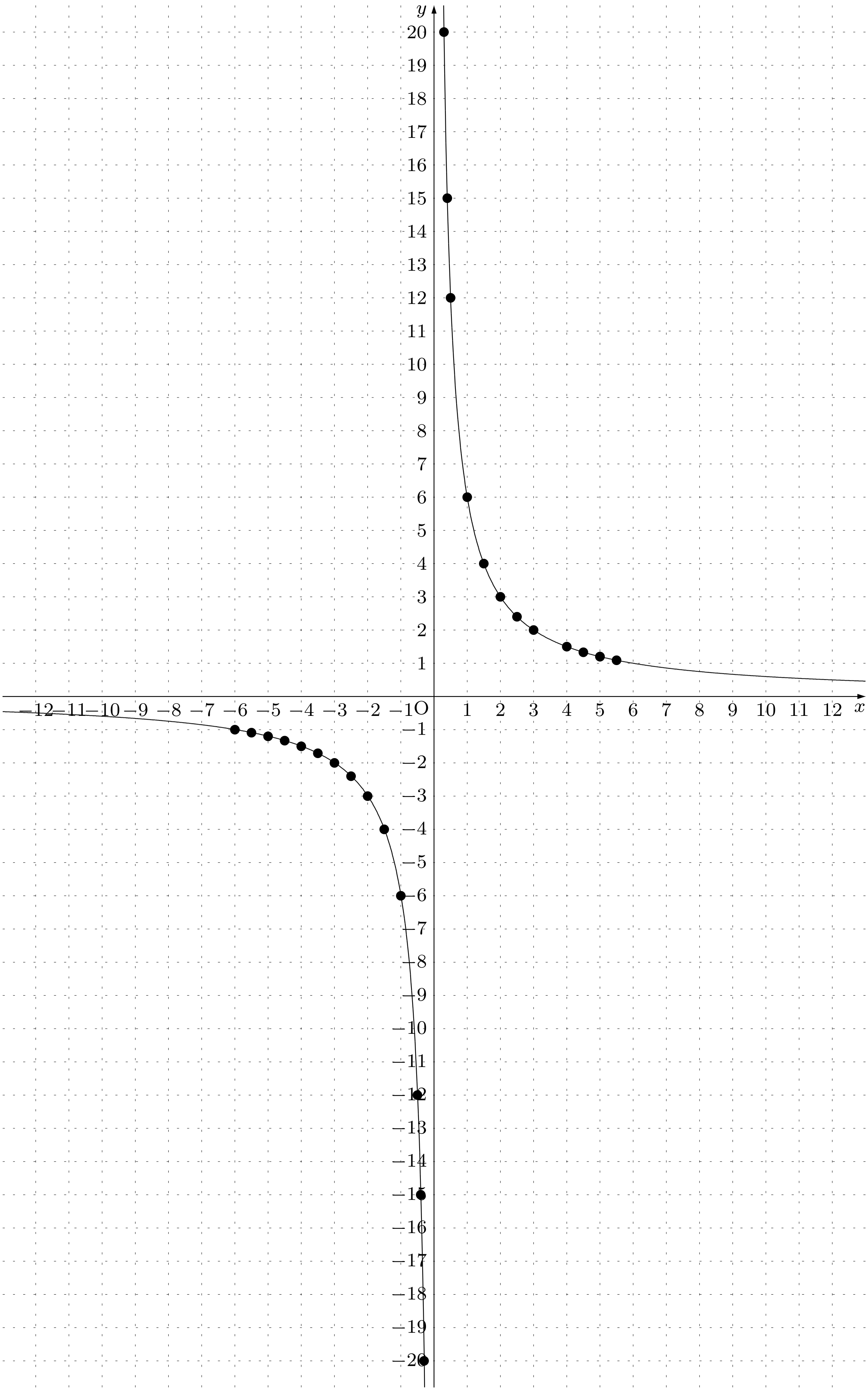
この座標平面は、y 軸は -20 ぐらいから 20 ぐらいの範囲しか用意していなかったので、x が -0.2、-0.1 の点や、x が 0.2、0.1 の点ははみ出してしまいました。しかしこれで、かなりよく、この関数のグラフの形がわかってきました。2 本の曲線に別れるようです。y 軸の上には点はないのですから、y 軸の左側の曲線と y 軸の右側の曲線はつながるわけはないですよね。

ただ、まだ少し、気になることがあります。それは、x が 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と、どんどん大きくなっていたら、点たちはどこに出てくるのかということと、x が -6、-7、-8、-9、-10、-11、-12 $\cdots$ と、どんどん小さくなっていたら、点たちはどこに出てくるのかということです。

まず、x が 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と、どんどん大きくなっていくときのことを考えてみます。さっき打った点たちを見ると、x が大きくなればなるほど、点たちはだんだん下へ下がっていくようです。では、x 軸より下に下がることはあるのでしょうか。ちょっと考えてみましょう。この関数は $y = \dfrac{6}{x}$ という式でした。x が大きくなっていくということは、$\dfrac{6}{x}$ の分母が大きくなっていくということです。分子は 6 のままで変わらないですよね。そうすると、分母だけが 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と大きくなっていくので、この分数はどんどん 0 に近い数になっていきますよね。ただし、マイナスには絶対にならないですよね。ですから、x が大きくなればなるほど、点たちは x 軸に、x 軸の上から近づいていくわけです。

今度は、x が -6、-7、-8、-9、-10、-11、-12 $\cdots$ と、どんどん小さくなっていくときのことを考えてみます。さっきと同じように考えれば、$\dfrac{6}{x}$ という分数はどんどん 0 に近い数になっていきますよね。ただし、プラスには絶対にならないですよね。ですから、x が小さくなればなるほど、点たちは x 軸に、x 軸の下から近づいていくわけです。

ここまで考えておけば、かなり安心してグラフを完成することができますね。関数 $y = \dfrac{6}{x}$ のグラフは次のようになるわけです。


y
x
O
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16
−17
−18
−19
−20
−12 −11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

これで、反比例 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフが完成しました。でもこれで終わりではありませんね。たしか、グラフができたら、どんな特徴があるのか考えてくれと言われてましたね。では、今作ったグラフを見て考えることにしましょう。まぁ、人によって気づくことは色々なのですが、ここであなたに気づいてほしいのは次のようなことです。

- 反比例 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れる。
- 反比例 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。
- 反比例 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりである。ということは、この関数では、x がマイナスの値のときは、x が増えれば y は必ず減り、x がプラスの値のときは、x が増えれば y は必ず減るということである。

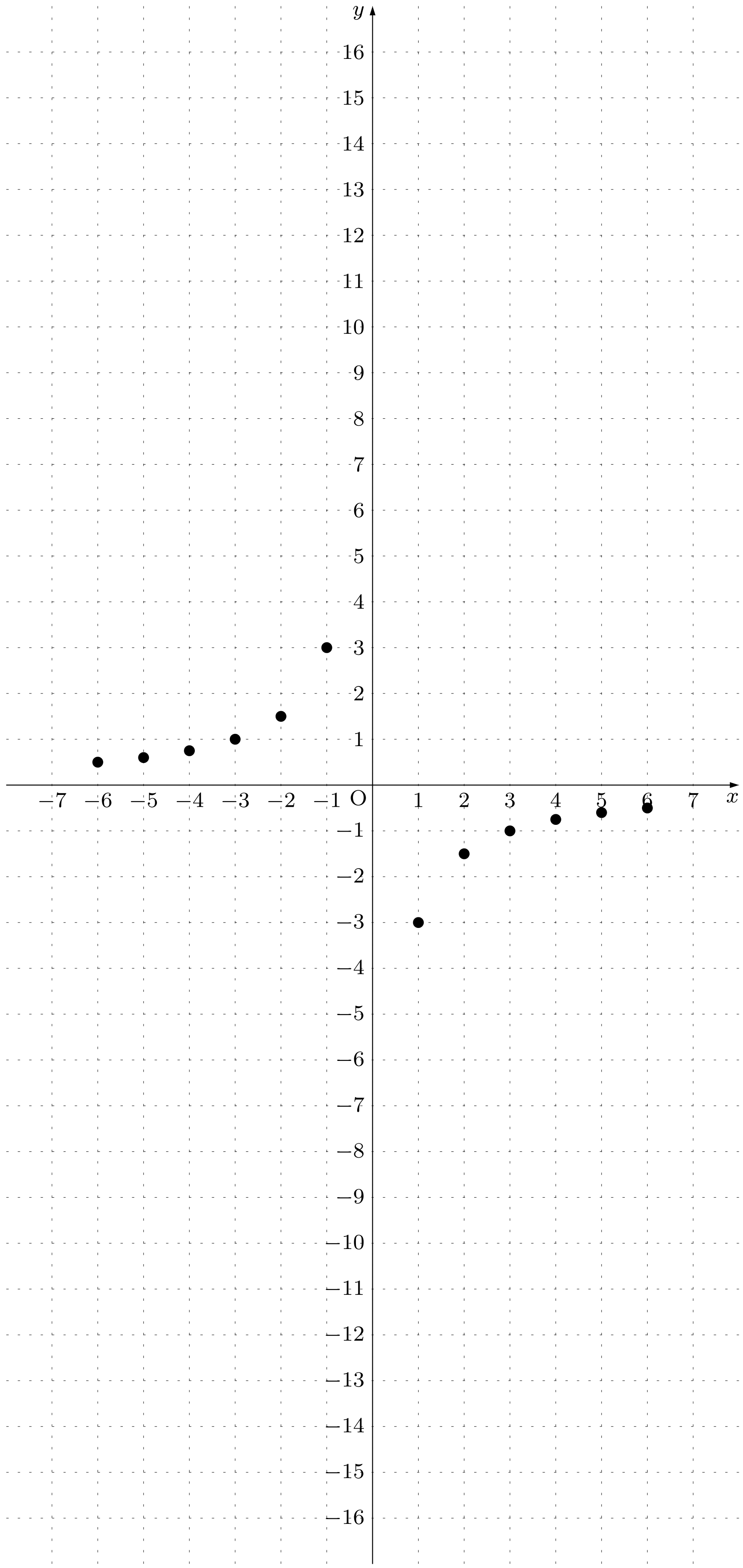
どうですか？どんな特徴があるかわかってもらえましたか？

例 24　反比例 $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフとその特徴

関数のグラフを作るには、まず準備として、「関数の表」を作るのでしたね。ここでは、x の範囲を -6 ぐらいから 6 ぐらいまでにして調べることにします。また、x は 1 きざみで変えて調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	0.5	0.6	0.75	1	1.5	3	$\times$	-3	-1.5	1	-0.75	-0.6	-0.5	$\cdots$

次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのでしたね。そうすると次のようになるはずです。



y
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 O 1 2 3 4 5 6 7 x
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16

次は、今打たれた点たちの間を「本当らしく」結びます。でも、今打った点の並び方を見ると、ちょっと悩みますね。まっすぐ並んではいませんね。ですから、きっと、点と点の間をまっすぐ結んだらダメですよね。

あと、もうひとつ、気になることがあります。あなたもきっと気になってますよね。（まさか「えー、何のこと？」なんて言いませんよね。）表をよく見てください。x が 0 の所には y の値は書いてありません。だって、この関数 $y = -\dfrac{3}{x}$ って、入口から 0 を入れてはいけないんですよね。（どうしてダメなのか、いまさら説明しなくても大丈夫ですよね。）

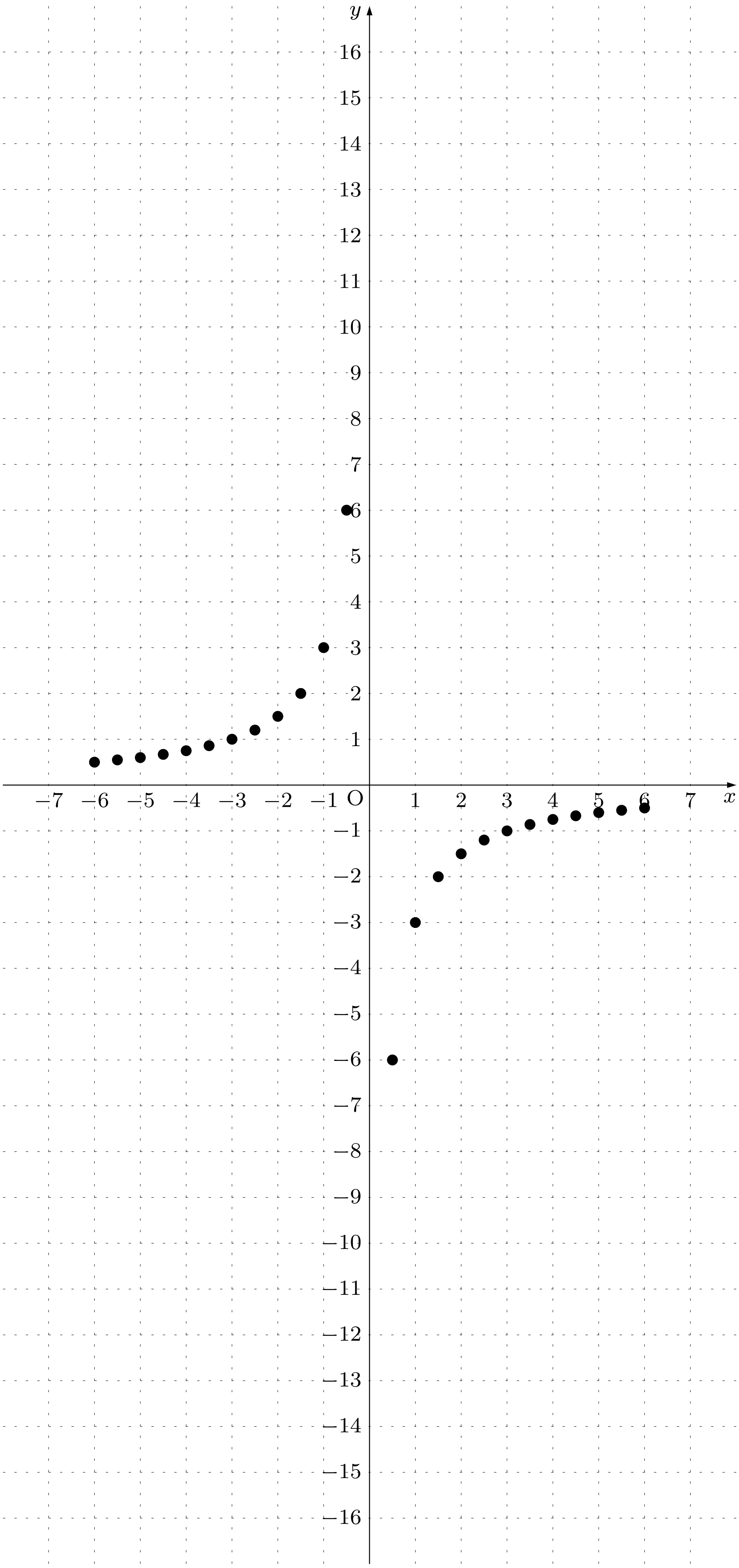
というわけで、座標平面にも x が 0 になるような点は打たれることはありませんね。（つまり、y 軸の上には 1 つも点はないんですよ。）こういうのって、点を結んでいくとき、結構困りませんか？

いま説明したように、いろいろな心配事があるわけです。ですから、いい加減に点を結んでいくと失敗しそうです。そこで、もっと
$y = \dfrac{3}{x}$ 詳しく調査をしてから、点と点の間を結ぶことにします。そこで、ちょっと気合を入れて、x の値を 0.5 きざみで変えて調べてみましょう。そうすると、次のようになります。

x	$\cdots$	-6	-5.5	-5	-4.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0
y	$\cdots$	0.5	-0.55 ぐらい	0.6	0.67 ぐらい	0.75	0.86 ぐらい	1	1.2	1.5	2	3	6	

0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	$\cdots$
	-6	-3	-2	-1.5	-1.2	-1	-0.86 ぐらい	-0.75	-0.67 ぐらい	-0.6	-0.55 ぐらい	-0.5	$\cdots$

0.5 きざみで調べたので、表が長くなってしまいました。仕方がないので x が 0 のところで分けて 2 つの表にしました。ではこの表を見て点を追加しましょう。そうすると、次のようになりますね。


y
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
O
x
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16

どうですか、$y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフの本当の形が少しわかってきた気がしませんか？でも、まだ気になることがあります。そうです、x が 0 のとき y はないので、y 軸の上には点はないのです。そこで、y 軸の近くでグラフがどうなるのか、さらに気合をいれて調べてみることにします。

今度は、0.1 きざみで調べます。だけど、y 軸の近くを調べたいので、x を 0 に近い数ばかりにして調べることにします。そうですねぇ、ここでは -0.5 から 0.5 の範囲を調べることにしましょうか。そうすると表は次のようになります。

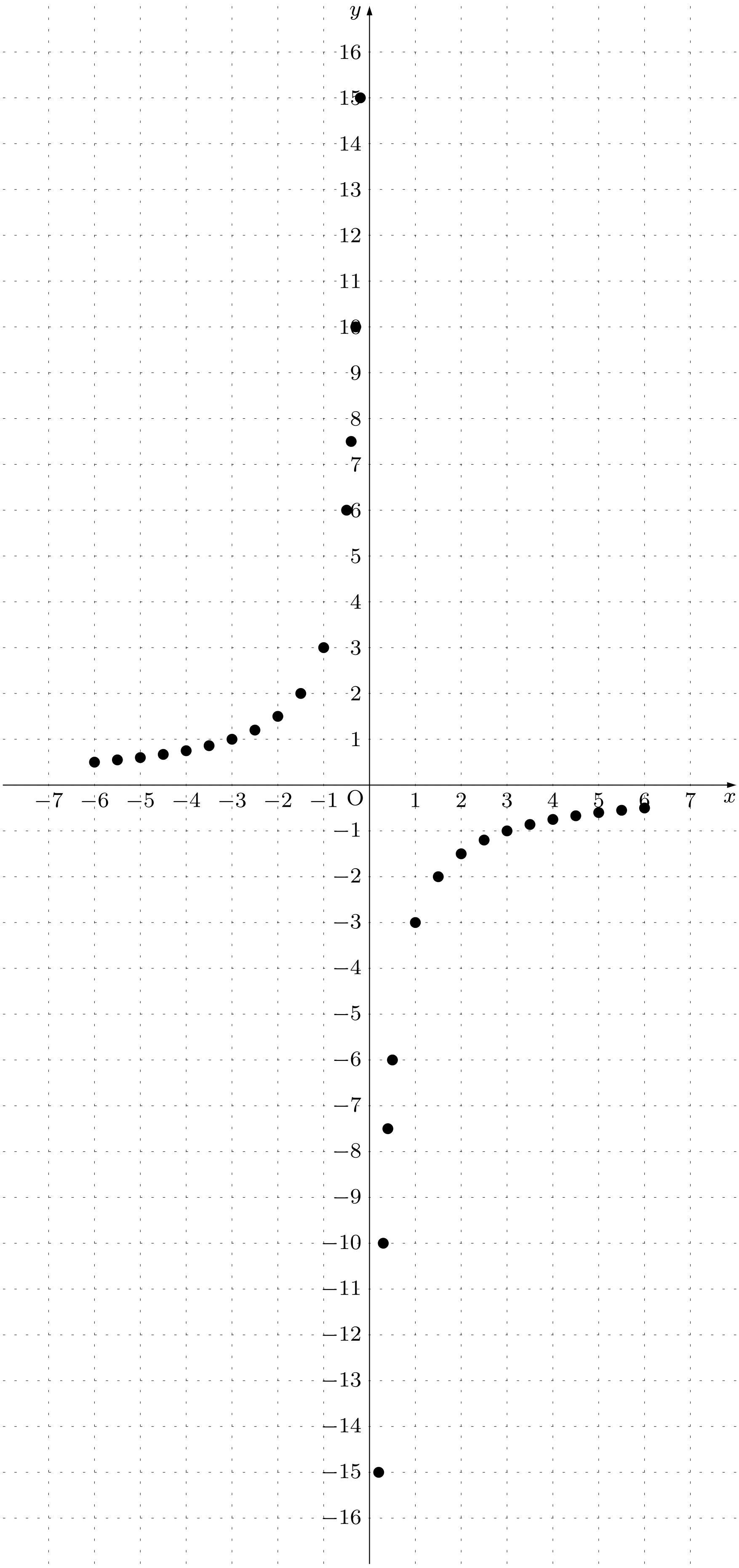
x	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.45	0.5
y	6	7.5	10	15	30		-30	-15	-10	-7.5	-6

この表をよく見てくださいね。

x の値が、-0.5、-0.4、-0.3、-0.2、$-0,1$ $\cdots$ と、マイナスの数のまま 0 に近づいていくと、y の値は、6、7.5、5、10、15、30 $\cdots$ と変化していきます。y は激しく大きくなっていくわけですね。ということは、y 軸の左側から、y 軸に近づいていくと、点たちは、どんどん上のほうに出てくるということになりますね。

また、x の値が、0.5、0.4、0.3、0.2、0,1 $\cdots$ と、プラスの数のまま 0 に近づいていくと、y の値は、-6、-7.5、-10、-15、-30 $\cdots$ と変化していきます。y は激しく小さくなっていくわけですね。ということは、y 軸の右側から、y 軸に近づいていくと、点たちは、どんどん下のほうに出てくるということになりますね。

では、今調べた点たちも使って、座標平面に点を追加してみましょう。すると、次のようになります。


y
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 O 1 2 3 4 5 6 7 x
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
−13
−14
−15
−16

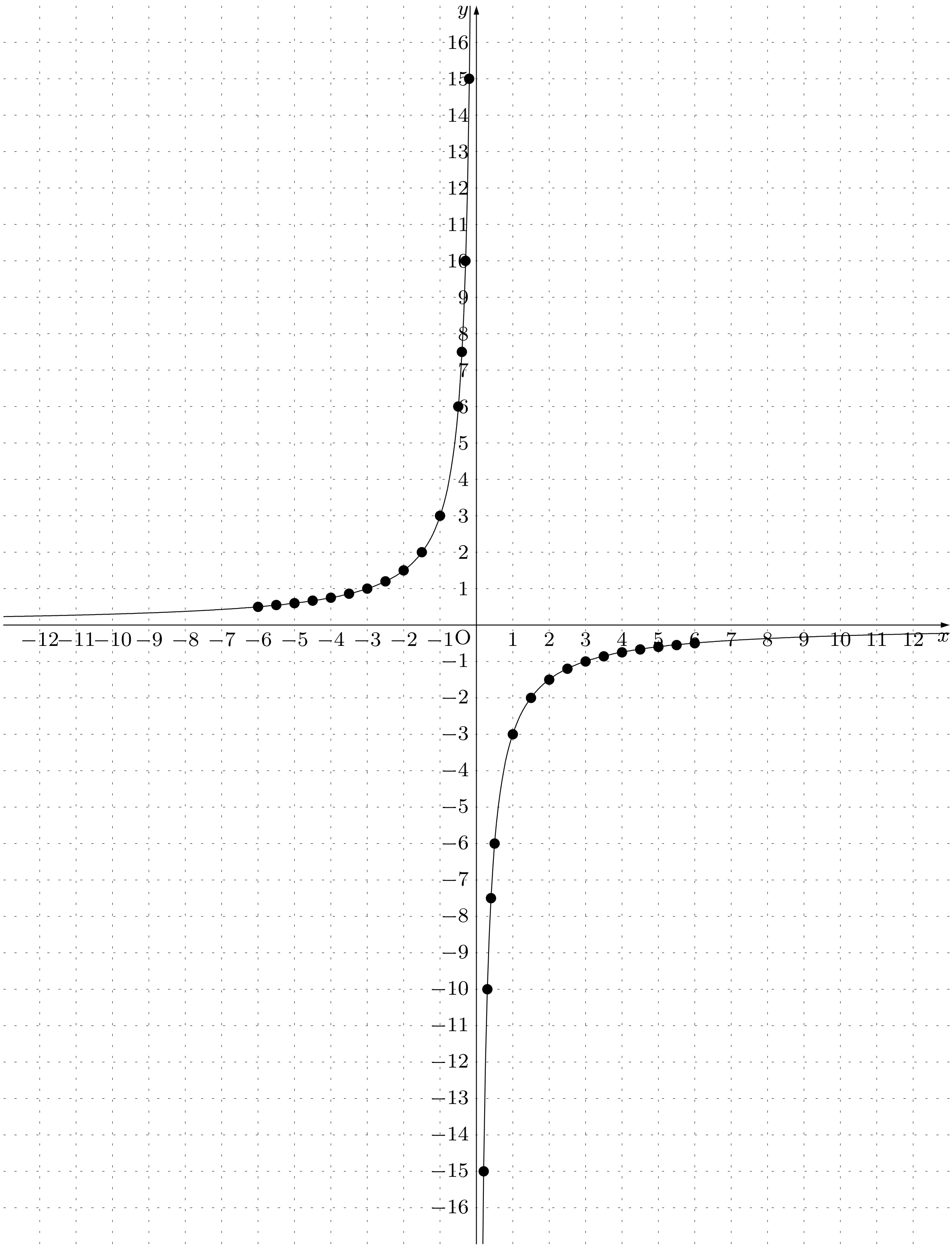
この座標平面は、y 軸は -16 ぐらいから 16 ぐらいの範囲しか用意しなかったので、x が -0.1 の点や、x が 0.1 の点ははみ出してしまいました。しかしこれで、かなりよく、この関数のグラフの形がわかってきました。2 本の曲線に別れるようです。y 軸の上には点はないのですから、y 軸の左側の曲線と y 軸の右側の曲線はつながるわけはないですよね。

ただ、まだ少し、気になることがあります。それは、x が 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と、どんどん大きくなっていたら点たちはどこに出てくるのかということと、x が -6、-7、-8、-9、-10、-11、-12 $\cdots$ と、どんどん小さくなっていたら、点たちはどこに出てくるのかということです。

まず、x が 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と、どんどん大きくなっていくときのことを考えてみます。さっき打った点たちを見ると、x が大きくなればなるほど、点たちはだんだん上へ下がっていくようです。では、x 軸より上に上がることはあるのでしょうか。ちょっと考えてみましょう。この関数は $y = -\dfrac{3}{x}$ という式でした。x が大きくなっていくということは、$-\dfrac{3}{x}$ の分母が大きくなっていくということです。分子は 3 のままで変わらないですよね。そうすると、分母だけが 6、7、8、9、10、11、12 $\cdots$ と大きくなっていくので、この分数はどんどん 0 に近い数になっていきますよね。ただし、プラスには絶対にならないですよね。ですから、x が大きくなればなるほど、点たちはx 軸に、x 軸の下から近づいていくわけです。

今度は、x が -6、-7、-8、-9、-10、-11、-12 $\cdots$ と、どんどん小さくなっていくときのことを考えて見ます。さっきと同じように考えれば、$-\dfrac{3}{x}$ という分数はどんどん 0 に近い数になっていきますよね。ただし、マイナスには絶対にならないですよね。ですから、x が小さくなればなるほど、点たちはx 軸に、x 軸の上から近づいていくわけです。

ここまで考えておけば、かなり安心してグラフを完成することができますね。関数 $y = -\dfrac{3}{x}$ のグラフは次のようになるわけです。



これで、反比例 $y = -\dfrac{3}{x}$ のグラフが完成しました。でもこれで終わりではありませんね。たしか、グラフができたら、どんな特徴があるのか考えてくれと言われてましたね。

では、今作ったグラフを見て、考えることにしましょう。まぁ、人によって気づくことは色々なのですが、ここであなたに気づいてほしいのは次のようなことです。

- 反比例 $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y はプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y はマイナスの世界に現れる。
- 反比例 $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。
- 反比例 $y=-\dfrac{3}{x}$ のグラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりである。ということは、この関数では、、x がマイナスの値のときは、x が増えれば y は必ず増え、x がプラスの値のときは、x が増えれば y は必ず増えるということである。

どうですか？どんな特徴があるかわかってもらえましたか？

問 44. $y=\dfrac{3}{x}$ という反比例について、以下の問に答えなさい。

(1) x の値が 10、100、1000 のとき y の値はそれぞれいくつですか？また、さらに x の値を大きくしていくと y の値はどうなっていきますか？

(2) x の値が 10、100、1000、10000、100000 $\cdots$ と大きくなればなるほど、$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフはどうなっていきますか。(1) で考えたことを頭に入れて答えなさい。

(3) x の値が 0.1、0.01、0.001 のとき y の値はそれぞれいくつですか？また、さらに x の値をプラスのままどんどん 0 に近づけていくと y の値はどうなっていきますか？

(4) x の値が 0.1、$0,01$、0.001、0.0001、0.00001 $\cdots$ のように、プラスのまま 0 に近づけば近づくほど、$y=\dfrac{3}{x}$ のグラフはどうなっていきますか。(3) で考えたことを頭に入れて答えなさい。

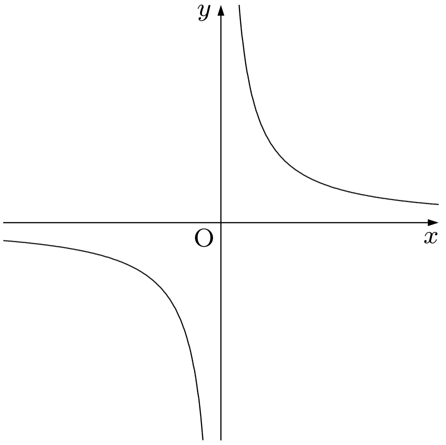
答えを見る

さて、ここまでいくつかの問を考えてもらい、さらに、問に出てきた 2 つの反比例については、グラフとをの特徴を教えました。ここまで考えてきたことをまとめておきましょ

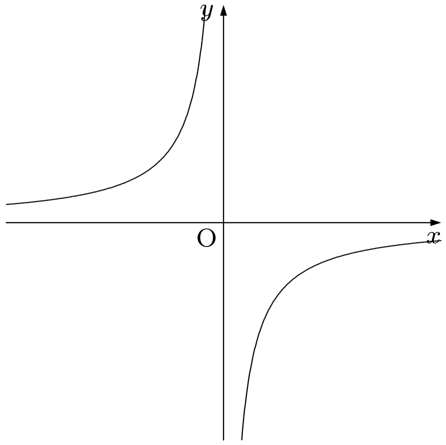
う。自分の頭を使って考えてきた人は次のことがわかったと思います。

重要な事実：反比例のグラフの特徴

(1) 反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは、

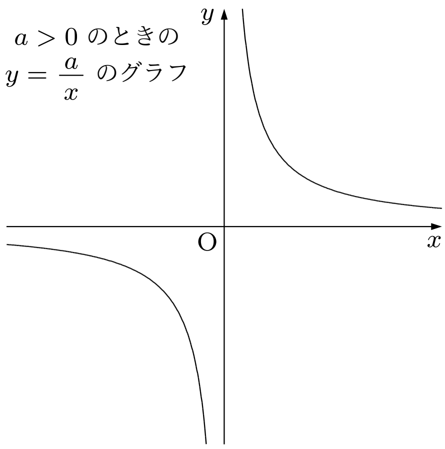


や



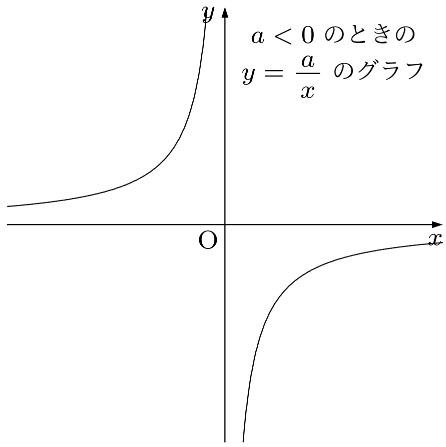
のような、なめらかな 2 本の曲線になります。このような曲線は**双曲線**と呼ばれています。

(2) a がプラスの数のとき、反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは、



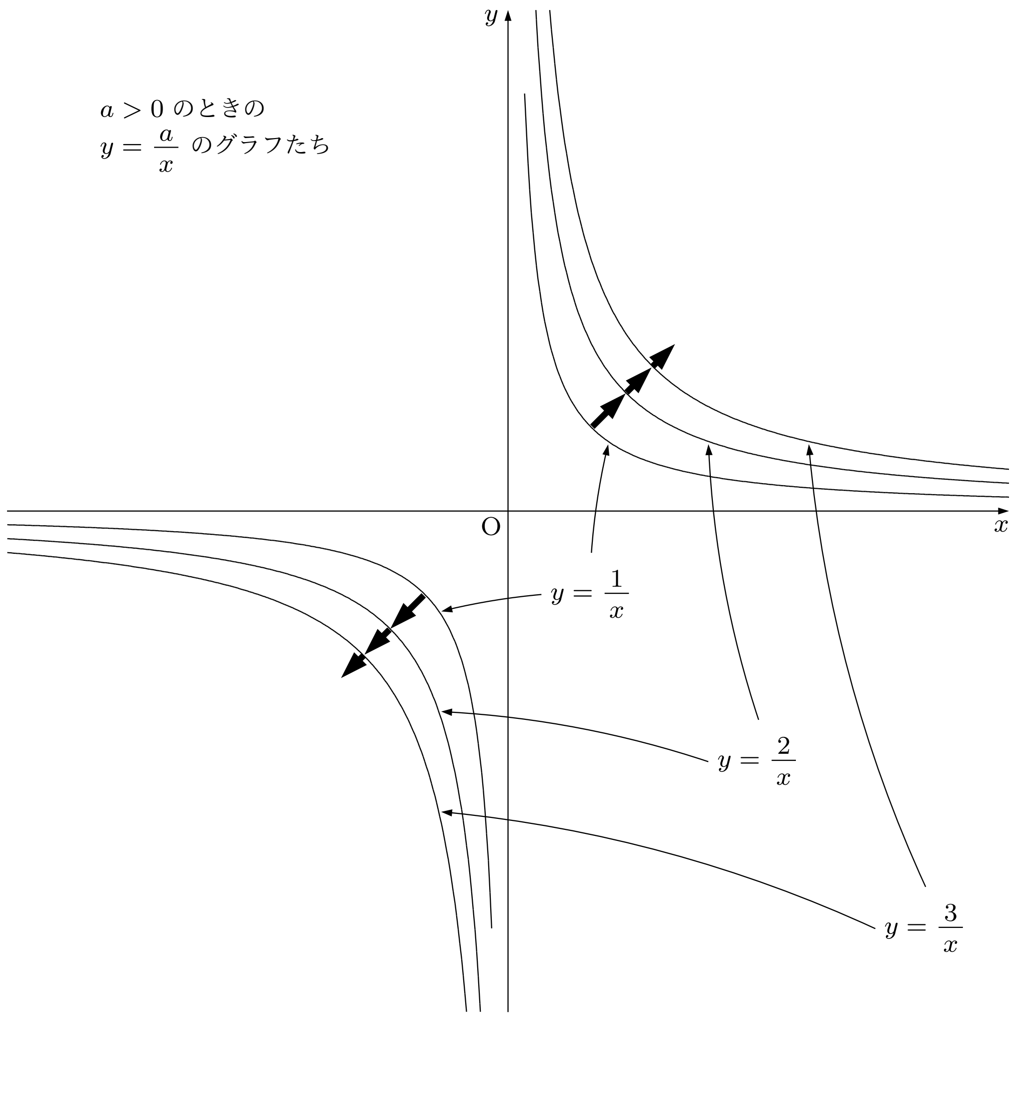
のようになります。

(3) a がマイナスの数のとき、反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフは、

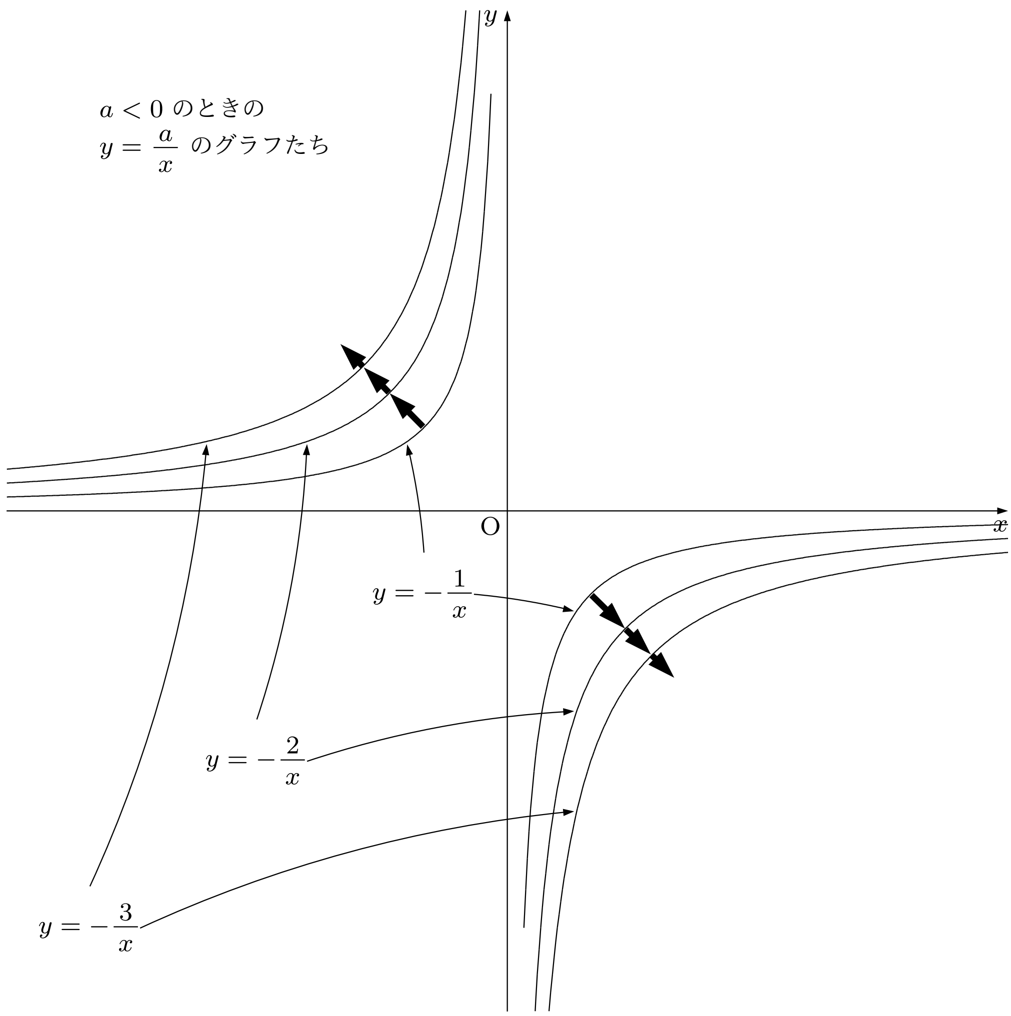


のようになります。

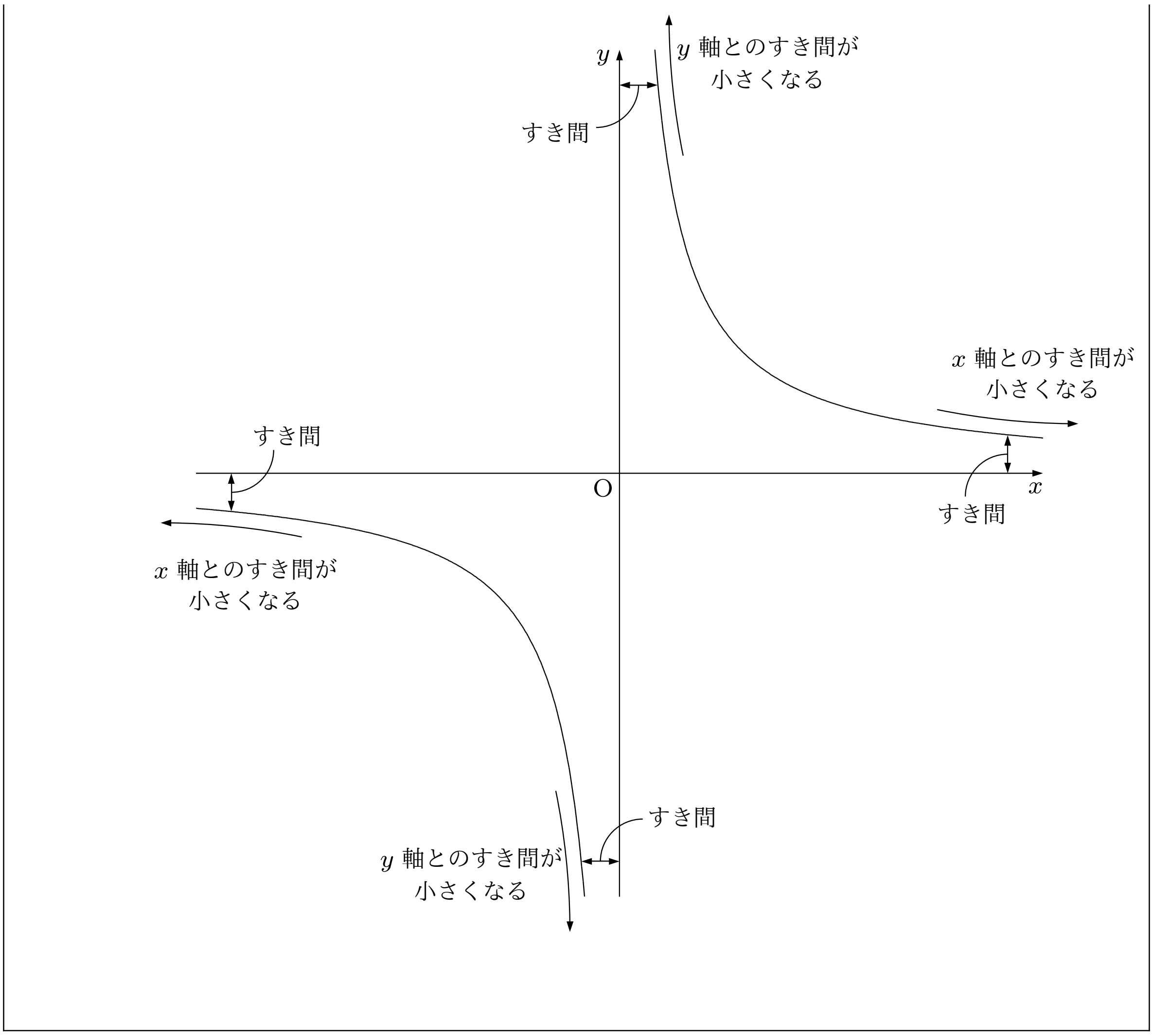
(4) 比例定数 a がプラスの場合、a が 1、2、3 $\cdots$ とだんだん大きくなればなるほど、$y = \dfrac{a}{x}$ のグラフの出現する場所は、次の図のように矢印の方向へずれていきます。



(5) 比例定数 a がマイナスの場合、a が $-1, -2, -3 \cdots$ とだんだん小さくなればなるほど、$y = \dfrac{a}{x}$ のグラフの出現する場所は、次の図のように矢印の方向へずれていきます。

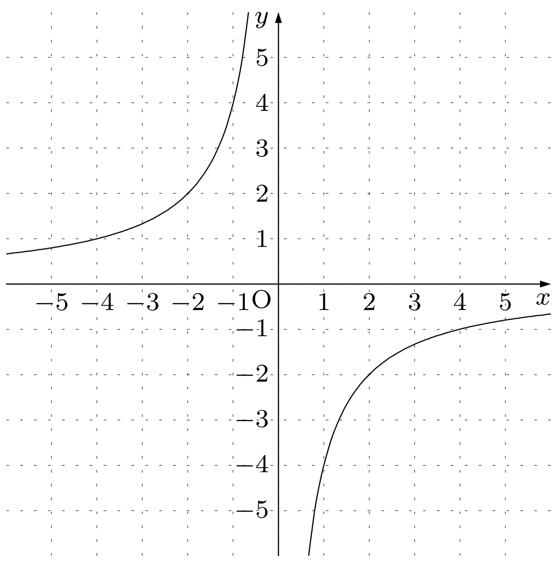


(6) 反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフの上を（好きな方向へ）たどっていくと、次の図のように、どんどん x 軸や y 軸に接近していきます。つまり、x 軸や y 軸とのすき間が小さくなっていきます。



グラフの特徴がわかったので、今度は、グラフから式を当てる練習をしましょう。

例題 6　右の図は、ある反比例のグラフを書いたものです。この関数の決まりを表す式はどんな式ですか。



解答

「反比例」は必ず、

$$y = \frac{a}{x}$$

という形の数式です。ですから、あと a がいくつなのかわかれば式は完成です。しかし今の所、a がいくつなのかわかりません。そこでグラフを見て、何か良い手ががりはないか考えて見ましょう。よく見ると、グラフは x が 2 で y が -2 の所を通っています。(つまり、座標が $(2, -2)$ である点を通っています。) ということは、この関数では、x に 2 を入れると、y として -2 が出てくるということですね。ですから、さっきの $y = \dfrac{a}{x}$ という式で、x を 2 にして y を -2 にしてみましょう。すると、

$$-2 = \frac{a}{2}$$

となりますよね。この式を使えば、謎の数 a の正体がわかるはずです。

まず、左と右を入れかえて、

$$\frac{a}{2} = -2$$

となりますね。

次は、左と右に 2 をかけましょう。そうすると、

$$a = -4$$

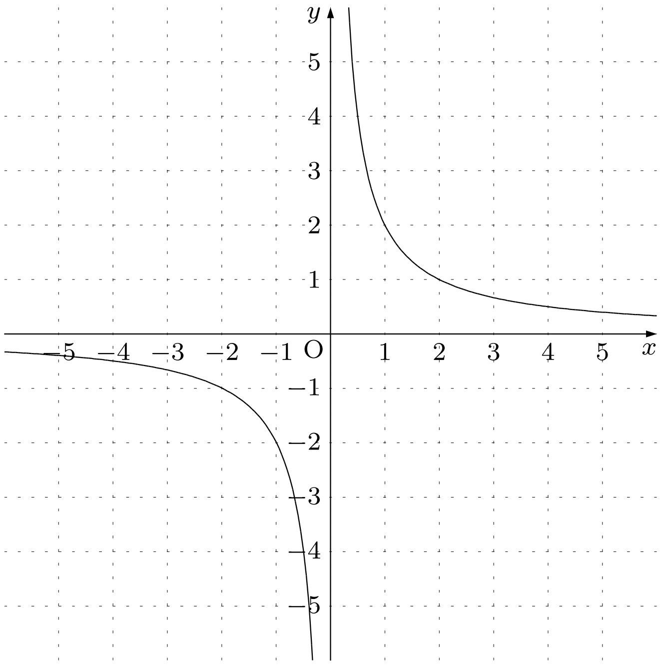
ですね。

この問題の関数は「反比例」の仲間なので、この関数の式は $y = \dfrac{a}{x}$ という形をしているということでしたね。そして今、a の正体がわかったのですね。ですから、この関数の式もわかります。もちろん、

$$y = -\frac{4}{x}$$

ですね。

問 45. 右の図は、ある反比例のグラフを描いたものです。この関数の決まりを表す式はどんな式ですか。



答えを見る

第4章

身近にある比例や反比例

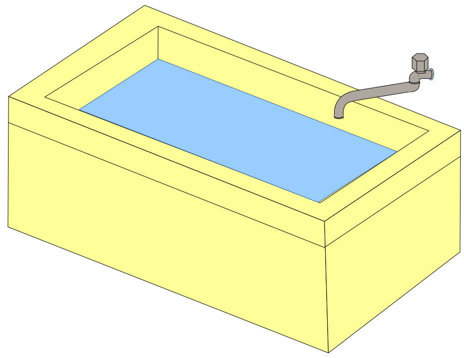
実は私たちの周りには、「比例」や「反比例」と呼ばれる現象がいろいろとあります。ですから本当は、わざわざ学校で習わなくても、普通に生活をしているだけで知らず知らずのうちに「比例」や「反比例」ということを理解できてしまうことが多いのです。しかし現代社会では、様々なことが機械で自動的に行われてしまいます。そのため、自分の周りには「比例」や「反比例」があるということに気が付かない人も多いようです。

4.1 身近にある比例

連動して変化する 2 つの量があるとします。片方の量が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくとき、もう片方の量も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていったらそれは比例という現象です。

4.1.1 身の回りの比例を見つけ、謎の量を求める方法を考えよう

例 25 お風呂のお湯はり


浴そうに水をためて沸かすには

お風呂に入ろうと思ったら、浴そうにお湯をためる必要がありますよね。あなたはいつもどうやって浴そうにお湯をためていますか？（「そんなの自分じゃやらないよ。いつもお母さんがやってるもん。」なんて言っている人もいるかもしれませ

んね。たまには自分でやってみるといいですよ。)

今はとても便利な時代なので、お風呂のお湯はりも自動で機械がやってくれます。温度設定をしてお湯はりボタンを押せば、勝手に機械が浴そうに「調度良い温度のお湯を調度良い量」ためてくれます。しかも「お風呂がわいたよー」って教えてくれたりします。人間は特に頭を使う必要はありません。しかし、昔は違いました。どうするのかというと、まず、水道の蛇口を開いて水を浴そうにためます。水をため終わったら、ふろがまを点火し、ガスの力で水を温めるのです。

ここで次のような 2 つの「困ったこと」があります。

困ったこと 1　水道の蛇口を開いて水を浴そうにためるのには時間がかかります。づっと浴そうのそばにいて水が適切な量たまるのを待って見ているのは退屈です。そこで、「テレビでも見ていようかなー」なとど考え、浴そうから離れてしまいます。テレビを見ているうちに、水をためていたことを思い出し「あっ、そろそろ水はたまったかな？」などと言いながら浴そうを見に行きます。そうすると、よくあることですが「あー。まだまだじゃん。見に来るの早すぎた。」とか「あー遅いよ。大変じゃん。水、あふれちゃったよ。」などということになっているのです。特に水があふれてしまったときは大変です、水が無駄になってしまっただけでなく、親におこられてしまうのです。

つまり、何が問題かというと、よく気をつけていないと、適切な量の水を浴そうにためられないのです。

困ったこと 2　水を浴そうにため終わったら、ふろがまを点火し、ガスの力で水を温めるのですが温まるまで時間がかかります。づっと浴そうのそばにいて適切な温かさになるのを待っているのは退屈です。そこで、「テレビでも見ていようかなー」などど考え、浴そうから離れてしまいます。テレビを見ているうちに、水を温めていたことを思い出し「あっ、そろそろ丁度いい温度になったかな？」などと言いながら浴そうを見に行きます。そうすると、よくあることですが「あー。まだまだじゃん。ぬるいよ。見に来るの早すぎた。」とか「あー遅いよ。大変じゃん。ボコボコ

言ってるよ。熱湯になっちゃったよ。こんなお湯に入ったら死ぬ。」などということになっているのです。特にあつすぎるお湯になってしまったときは大変です、ガスが無駄になってしまっただけでなく、親におこられてしまうのです。

つまり、何が問題かというと、よく気をつけていないと、適切な温度のお湯に温められないのです。

このような2つの「困ったこと」を何とかするため、昔の子供は頭を使いました。どのように考えたのかこれから説明します。ただし、「困ったこと2」を解決するのは少し難しいので「困ったこと1」について説明します。

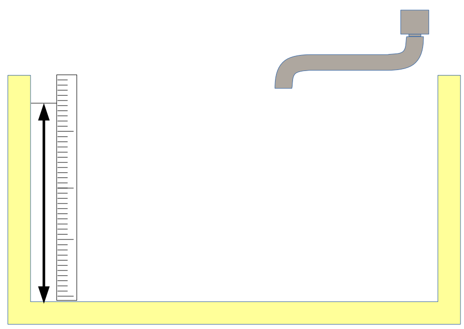
　昔の子供は、何度かお湯はりを自分でしているうちに、重要なことに気づきます。それは次のことです。

> 水を入れ始めてからの時間が2倍、3倍、4倍・・・となっていくと、水面の高さも2倍、3倍、4倍・・・となっていく。
> どうしてそんなことになるのかというと、水道の蛇口を開いて（もう蛇口をいじらないようにして）おくと蛇口からでる水の勢いはずっと同じままで、一定の量の水が出続けるからである。

（一応念のため言っておきます。昔の子供の気づいた「 水を入れ始めてからの時間が2倍、3倍、4倍・・・となっていくと、水面の高さも2倍、3倍、4倍・・・となっていく。」という現象ですが、これって「比例」の性質ですよね。）このことに気づいた昔の子供は、時計とものさし（メジャー、つまり巻き尺とかコンベックスなどでも良い）を用意して次のようにしていくことにしました。どうすることにしたのかというと、・・・

手順1　まず、水を入れ始める前に浴そうで「ためたい水の深さ」を測っておきます。

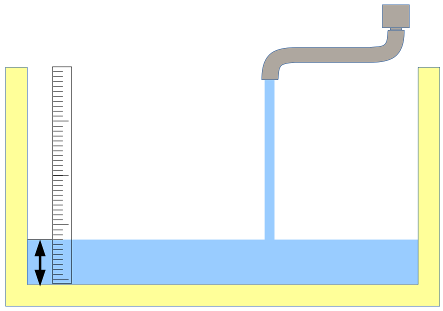
ここでは、例えば「ためたい水の深さ」を48 cmぐらいにしてみましょう。



ためたい水の深さを測る

手順 2　そして水を入れはじめたら少し時間がたつのを待って、「水の深さ」を測り、「水を入れ始めてから何分たっているのか」を覚えておきます。

例えば「水の深さ」が 8 cm になったとき、水を入れ始めてから 2 分たっていたとしましょう。



水を入れはじめたら少し時間がたつのを待ち、「水の深さ」を測り、「水を入れ始めてから何分たっているのか」を覚えておく。

手順 3　昔の子供はここで考えます。「2 分たつと、深さが 8 cm になるのか。 そして、水を入れ始めてからの時間が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと、水の深さも 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくんだよな。だったら、4 分たてば深さは 16 cm、6 分たてば深さは 24 cm、8 分たてば深さは 32 cm、10 分たてば深さは 40 cm、12 分たてば深さは 48 cm・・・。わかった、水を入れてから 12 分後に見にくればいいじゃん。」

このようにして昔の子供は、あと何分立ったらお風呂の様子を見にくれば良いのか計算することができたのです。

これでめでたしめでたしということなので、昔の子供は考えるのをやめても良かったのですが、もっと深く考えてみることにしました。そして次のようなことに気づきました。

「水を入れ始めてからの時間が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと、水面の深さも 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくんだよな。だったら時間が半分になれば水の深さも半分のはずじゃん。2 分たつと、深さが 8 cm になったのだから、1 分しかたっていなかった時は水の深さは 4 cm だったんだな。これは重要な発見だ。」

どうですか？あなたもそう思いませんか。だって・・・

「水を入れ始めてからの時間が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと、水の深さも 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくんだよな。1 分たった時は水の深さは 4 cm になるんだから、2 分たてば深さは 8 cm、3 分たてば深さは 12 cm、4 分たてば深さは 16 cm、5 分たてば深さは 20 cm、6 分たてば深さは 24 cm・・・となっていくわけか。そうか、つまり、

$$4\times \text{水を入れ始めてからの時間}$$

を計算すれば水の深さがわかるんじゃん。」

ということがわかるからです。もう一度言うと、1 分後に水の深さが 4 cm になるということを発見したおかげで、

$$\text{水の深さ} = 4\times \text{水を入れ始めてからの時間}$$

となっていることがわかるわけです。このことを、文字 x や文字 y を使って数学っぽく言って見ると次のようになります。

浴そうに水を入れ始めてから 1 分後に水の深さが 4 cm になったとします。水を入れ始めてからの時間が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと、水の深さも 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくので、水を入れ始めてから x 分後の水の深さを y cm とすると

$$y = 4x$$

が成り立ちます。そしてこれは比例の仲間です。

例題 7　箱の中にかなりたくさんのネジが入っています。箱の中に入っているネジは全て同じ種類のネジです。実は、この箱の中に入っているネジの本数がわからなくなってしまったのですが、何とかしてできるだけ正確に本数を知りたいと思います。ただし、ネジの本数はとても多いので全部素直に数えるのは嫌です。あなたならどうしますか？次の問に順番に答えてみてください。

(1) もし、何か道具を使うとしたら何を使うのが良さそうですか？

(2) ネジの本数を知る方法を答えてください。

解答

(1) 昔の人は、頭の中で考えているだけでなく実際に手を使っていろいろと考えたものでした。例えば、じっとネジの入った箱を見て悩んでいるだけでなく、ネジの入った箱を持ってみたり、ネジを箱から何本か取り出して手に持ってみたりしたのでした。そうしているうちに何か気づいたようです。

「ネジの本数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さも 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくじゃん。」

これ、重要な発見ですよね。きっと「はかり」を使えばネジの本数が分かりそうですよね。

(2) 昔の人はとりあえず、ネジを 20 本箱から取り出して測りで重さを測ってみました。そうするとネジ 20 本の重さは 30 g でした。

そして昔の人は考えました。「ネジ 20 本の重さは 30 g か。じゃあネジ 1 本の重さはどれだけなんだろう。ネジの本数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さも 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくんだから、逆に考えれば、$30 \div 20$ を計算すればいいじゃん。」と思ったのです。というわけで

$$\text{ネジ 1 本の重さ} = 30 \div 20 = 1.5\,\mathrm{g}$$

ということがわかりました。

次に昔の人はネジを箱から全てだし、さっきの 20 本のネジと合わせ、ネジを全部はかりの上に乗せました。そうすると、全部のネジの重さは 372 g であることがわかりました。

そこで昔の人は考えました。「ネジ 1 本の重さは 1.5 g なんだよな。そして全部の

重さは 372 g なんだよな。だったらネジの本数は $372 \div 1.5$ を計算すればわかるじゃん。」と思ったのです。というわけで

$$\text{ネジの本数} = 372 \div 1.5 = 248\,\text{本}$$

ということがめでたくわかったのです。

問 46. 500 枚入りのコピー用紙を買ってきて袋を開けて何枚か使ったのですが、何枚使ったのかもう覚えていません。結構使ったかもしれないのですが、まだまだたくさん残っています。何枚残っているのかできるだけ正確に知りたいのですが、真面目に 1 枚 1 枚数えるのは大変なので嫌です。なにか良い方法はありますか？ 答えを見る

4.1.2 身の回りにある比例で謎の量を求めたり、身の回りにある比例を式で表してみよう

例題 8 箱の中にかなりたくさんのネジが入っています。箱の中に入っているネジは全て同じ種類のネジです。箱の中からネジを全部取り出してはかりで重さをはかった所、ネジ全部の重さは 366 g でした。また、このネジを 10 本はかりにのせて重さをはかった所 12 g でした。以下の問に答えなさい。

(1) ネジ 1 本の重さを求めなさい。

(2) ネジの本数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますか？

(3) ネジの本数とネジの重さは比例していると言えますか？

(4) 最初に箱の中に入っていたネジは全部で何本ですか。

(5) ネジの本数が x 本のときのネジの重さを y g とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

解答

(1) ネジを 10 本はかりにのせて重さをはかった所 12 g だったのですから、

$$\text{ネジ 1 本の重さ} = 12 \div 100 = 1.2\,\mathrm{g}$$

ということになりますね。

(2) 全て同じ種類のネジですから、ネジの本数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますよね。

(3) ネジの本数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのですから、ネジの本数とネジの重さは比例していると言えますね。

(4) 最初箱の中に入っていた全部のネジの重さは 366 g ですね。そしてネジ 1 本の重さは 1.2 g でしたね。ということは

$$\text{最初箱の中に入っていた全部のネジの本数} = 366 \div 1.2 = 305\,\text{本}$$

ということになりますね。

(5) ネジ 1 本の重さは 1.2 g でしたね. そしてネジの本数 x が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さ y は 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのですね。だとしたら

$$y = 1.2x$$

という関係が成り立っていることになりますね。

問 47. 袋の中にたくさんのコピー用紙が入っています。袋の中からコピー用紙を全て出してはかりで重さをはかった所、コピー用紙全部の重さは 1672 g でした。また、このコピー用紙を 40 枚はかりにのせて重さをはかった所 152 g でした。以下の問に答えなさい。

(1) コピー用紙 1 枚の重さを求めなさい。

(2) コピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますか？

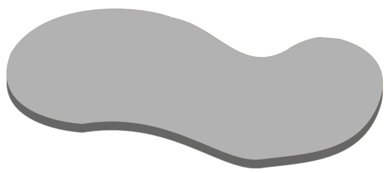
(3) コピー用紙の枚数とコピー用紙の重さは比例していると言えますか？

(4) 最初に袋の中に入っていたコピー用紙は全部で何枚ですか。

(5) コピー用紙の枚数が x 枚のときのコピー用紙の重さを $y\,\mathrm{g}$ とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

答えを見る

問 48. 右の図のような形をした鉄板があります。この鉄板の重さをはかりではかった所、重さは $1024\,\mathrm{g}$ でした。同じ種類で同じ厚さの鉄板を使い、1 辺 $5\,\mathrm{cm}$ の正方形の鉄板を作って重さをはかると $40\,\mathrm{g}$ でした。以下の問に答えなさい。



(1) 同じ種類で同じ厚さの鉄板で面積が $1\,\mathrm{cm}^2$ の鉄板を作ると重さはどれだけになりますか。

(2) 鉄板の面積が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますか？

(3) 鉄板の面積と鉄板の重さは比例しているといえますか。

(4) この図の鉄板の面積を求めなさい。

(5) 鉄板の面積が $x\,\mathrm{cm}^2$ のときの鉄板の重さを $y\,\mathrm{g}$ とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

答えを見る

4.2　身近にある反比例

連動して変化する 2 つの量があるとします。片方の量が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくとき、もう片方の量が $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていったらそれは反比例という現象です。

4.2.1　身の回りの反比例を見つけ、謎の量を求める方法を考えよう

例 26　おこづかいをためてゲームソフトを買おうと思うんだけど、買えるのはいつ？

達也くんは 4800 円のゲームソフトを買おうと思っています。そこで毎月のおこづかいから一定の金額をためていくことにしました。

毎月 200 円づつためると・・・　初め達也くんは毎月 200 円づつためていこうと考えました。そして、いつになったら買えるようになるのか計算しました。「えーと、$4800 \div 200 = 24$ ってなるから買えるのは 24 ヶ月後か。24 ヶ月って 2 年ってことだよな。そんなに待ってられないよ。よーし、じゃぁ、毎月ためていくお金をさっきの 2 倍にしてみよう。今度は 400 円だ。」

毎月 400 円づつためると・・・　というわけで、達也くんは毎月 400 円づつためていこうと考えました。そして、いつになったら買えるようになるのか計算しました。「えーと、$4800 \div 400 = 12$ ってなるから買えるのは 12 ヶ月後か。あー、さっきは 24 ヶ月だったから半分になったぞ。でも 12 ヶ月って 1 年ってことだよな。やっぱりそんなに待ってられないよ。よーし、じゃぁ、毎月ためていくお金を初めの 3 倍にしてみよう。今度は 600 円だ。」

毎月 600 円づつためると・・・　というわけで、達也くんは毎月 600 円づつためていこうと考えました。そして、いつになったら買えるようになるのか計算しました。「えーと、$4800 \div 600 = 8$ ってなるから買えるのは 8 ヶ月後か。あー、初めは 24 ヶ月だったから $\dfrac{1}{3}$ になったぞ。でもそれでも長いな。やっぱりそんなに待ってられないよ。よーし、じゃぁ、毎月ためていくお金を初めの 4 倍にしてみよう。今度は 800 円だ。」

毎月 800 円づつためると・・・　というわけで、達也くんは毎月 800 円づつためていこうと考えました。そして、いつになったら買えるようになるのか計算しました。「えーと、$4800 \div 800 = 6$ ってなるから買えるのは 6 ヶ月後か。あー、初めは 24 ヶ月だったから $\dfrac{1}{4}$ になったぞ。でもそれでも長いな。やっぱりそんなに待ってられ

ないよ。よーし、じゃぁ、毎月ためていくお金を初めの 5 倍にしてみよう。今度は 1000 円だ。」

キリがないのでこのへんでやめておきますが、話を振り返っておきましょう。

4800 円のゲームソフトを買うために、毎月のおこづかいから一定の金額をためていく話でした。

- 毎月 200 円づつためると、買えるようになるのは 24 ヶ月後
- 毎月 400 円づつためると、買えるようになるのは 12 ヶ月後
- 毎月 600 円づつためると、買えるようになるのは 8 ヶ月後
- 毎月 800 円づつためると、買えるようになるのは 6 ヶ月後

というようになるのですよね。これ、反比例ですよね。だって、「毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、買えるようになるまでの月数が $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく」わけですよね。

ゲームソフトを買えるまでの月数をいろいろ悩んでみた達也くんは、最後に次のようなことを悟りました。

> 買えるようになるまでの月数を $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}\cdots$ に変えたければ、毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えれば良い。

例題 9　ある値段のゲームソフトを買うために一定の金額のお金を毎月ためていくことにしました。そして、毎月 300 円づつためていくと、18 ヶ月お金をためる必要があることがわかりました。以下の問に答えなさい。

(1) 毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えると、買えるようになるまでの月数が $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？

(2) 毎月ためる金額を 300 円から 600 円に変えると、買えるようになるまで何ヶ月お金をためれば良いですか？

(3) 毎月ためる金額を 300 円から 900 円に変えると、買えるようになるまで何ヶ月お金をためれば良いですか？

(4) 買えるようになるまでの月数を 18 ヶ月ではなく 3 ヶ月に縮めるには、毎月いくらためれば良いですか。

解答

(1) 例 26 の説明をきちんと読んだ人はもうお分かりだと思いますが、「ゲームソフトの値段がいくらであろうと、毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えると、買えるようになるまでの月数が $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わる」と言えますよね。

(2) 毎月 300 円づつためていくと、18 ヶ月お金をためる必要があるのでした。

ところで、毎月ためる金額を 300 円から 600 円に変えるということは、毎月ためる金額を 2 倍にするということです。ということは、買えるようになるまで月数は $\frac{1}{2}$ になります。ですから 18 ヶ月の $\frac{1}{2}$、つまり 9 ヶ月お金をためればよいことになります。

(3) 毎月 300 円づつためていくと、18 ヶ月お金をためる必要があるのでした。

ところで、毎月ためる金額を 300 円から 900 円に変えるということは、毎月ためる金額を 3 倍にするということです。ということは、買えるようになるまで月数は $\frac{1}{3}$ になります。ですから 18 ヶ月の $\frac{1}{3}$、つまり 6 ヶ月お金をためればよいことになります。

(4) 買えるようになるまでの月数を $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}\cdots$ としたければ、毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていけば良いのですよね。

毎月 300 円づつためていくと、18 ヶ月お金をためる必要があるのでした。

買えるようになるまでの月数を 18 ヶ月ではなく 3 ヶ月に縮めるということは、買えるようになるまでの月数を $\frac{1}{6}$ にするということです。ですから、毎月ためるお金は 300 円の 6 倍にしなくてはいけません。つまり毎月 1800 円ためる必要があります。

補足：この問題では、ゲームソフトの値段は問題のどこにも出てきませんでした。そし

て、この解答でもゲームソフトの値段を求めたりはしませんでした。つまり、ゲームソフトの値段がいくらなのか知らなくてもこういう問題は解けるわけです。それは、「毎月ためる金額を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えると、買えるようになるまでの月数が $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わる」ということを活用したからです。（一応言っておきます。この問題のゲームソフトを買うためには、毎月 300 円づつためていくと、18 ヶ月お金をためる必要があるのでしたね。ですからゲームソフトの値段は $300 \times 18 = 5400$ 円です。）

問 49. 夏休みに数学の問題を解く宿題が出ました。問題数が全部でいくつなのか知らないのですが、友達によると、毎日 4 問づつ解くと 36 日で終わるそうです。以下の問に答えなさい。

(1) 毎日解く問題数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、終わるまでの日数は $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？

(2) 毎日解く問題数を 4 問から 8 問に変えると、終わるまでの日数は何日になりますか？

(3) 毎日解く問題数を 4 問から 24 問に変えると、終わるまでの日数は何日になりますか？

(4) 終わるまでの日数を 36 日ではなく 12 日に縮めるには、毎日何問解けば良いですか。

答えを見る

4.2.2　身の回りにある反比例で謎の量を求めたり、身の回りにある反比例を式で表してみよう

例題 10　袋入りのキャンディーを買ってきて何人かの人で分けることにします。袋の中に全部でいくつキャンディーが入っているのか知らないのですが、3 人で分けると 1 人分は 20 個になるそうです。以下の問に答えなさい。

(1) 分ける人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、1 人分のキャンディーの数は

$\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？

(2) 分ける人数を 3 人から 12 人に変えると、1 人分のキャンディーの数はいくつになりますか？

(3) 1 人分のキャンディーの数を 20 個ではなく 10 個にするには、何人で分ければ良いですか。

(4) x 人で分けるときの 1 人分のキャンディーの数を y 個とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

(5) (**??**) で答えた式を使って、この袋の中にあるキャンディーを 15 人でわけたとき、1 人分がいくつになるか求めなさい。

解答

(1) 「袋の中にいくつキャンディーが入っていても、分ける人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えると、1 人分のキャンディーの数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わる」と言えますよね。

(2) 3 人で分けると 1 人分は 20 個になるのでしたね。

ところで、分ける人数を 3 人から 12 人に変えるということは、分ける人数を 4 倍にするということです。ということは、1 人分のキャンディーの数は $\dfrac{1}{4}$ になります。ですから 20 個の $\dfrac{1}{4}$、つまり 5 個になります。

(3) 1 人分のキャンディーの個数を $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}\cdots$ としたければ、分ける人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていけば良いのですよね。

3 人で分けると 1 人分は 20 個になるのでしたね。

1 人分のキャンディーの個数を 20 個ではなく 10 個に変えるということは、1 人分のキャンディーの個数を $\dfrac{1}{2}$ にするということです。ですから、分ける人数は 3 人の 2 倍にしなくてはいけません。つまり分ける人数を 6 人にすれば良いのです。

(4) まず、全部でいくつのキャンディーがあるのか考えてみましょう。 3 人で分けると

1 人分は 20 個になるのですから、

$$全部のキャンディーの数 = 3 \times 20 = 60\,個$$

ということになりますね。

そうすると、x 人で分けるときの 1 人分のキャンディーの数 y を求めるには割り算で $60 \div x$ をすればよいのですから

$$y = \frac{60}{x}$$

とあらわすことができますね。

(5) (4) で、x 人で分けるときの 1 人分のキャンディーの数 y を求めるには $y = \dfrac{60}{x}$ という式を使えば良いことがわかりました。ですからこの袋の中にあるキャンディーを 15 人でわけたとき、

$$1\,人分 = \frac{60}{15} = 4\,個$$

と計算できますね。

問 50. ある中学校では、これまでこの中学校を卒業した人全員を対象とした同窓会を開くことになりました。そして、同窓会の日時を知らせるため、これまでこの中学校を卒業した人全員に同窓会のお知らせのはがきを出すことになりました。これまでこの中学校を卒業した人が全部で何人いるのか知らないのですが、5 人ではがきを書くと、1 人あたり 240 枚はがきを書かなければならないそうです。以下の問に答えなさい。

(1) はがきを書く人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、1 人が書かなければならないはがきの枚数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？

(2) はがきを書く人数を 5 人から 15 人に変えると、1 人が書かなければならないはがきの枚数は何枚になりますか？

(3) 1 人が書かなければならないはがきの枚数を 240 枚ではなく 40 枚にするには、何人ではがきを書けば良いですか。

(4) x 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を y 枚とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

(5) (4) で答えた式を使って、24 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を求めなさい。

答えを見る

問 51． 4 人でやると 12 日間かかる仕事があります。以下の問に答えなさい。

(1) 仕事をする人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、仕事にかかる日数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？ただし 1 人がする仕事の量はみんな等しいとします。

(2) この仕事を 3 日で終わらせるには何人でやれば良いでしょうか。ただし 1 人がする仕事の量はみんな等しいとします。

(3) x 人で仕事をするときに仕事にかかる日数を y 日とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。

(4) (3) で答えた式を使って、6 人で仕事をすると、何日で仕事が終わるか求めなさい。

答えを見る

問の解答

問 1. 「入り口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」なのですから入り口から $-\dfrac{7}{4}$ を入れると

$$\text{出口から } -\frac{7}{2} \text{ が出てくる}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 2. 「入り口から入れた数を 2 乗してさらに 3 倍して出口から出す」という「決まり」なのですから入り口から -3 を入れると

$$(-3)^2 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

となるので

$$\text{出口から } 27 \text{ が出てくる}$$

ということになります。

本文へ戻る

問 3. この解答では入り口から入れる数を x という文字であらわし、出口から出る数を y という文字であらわすことにします。

(1) 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひいた数を出口から出す」という決まりは

$$y = 3x + 5$$

という式であらわすことができます。

(2) 「入口から入れた数を $-\dfrac{1}{2}$ 倍してさらに $\dfrac{3}{2}$ をたした数を出口から出す」という決まりは

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

という式であらわすことができます。

(3) 「入口から入れた数を 2 乗してさらに -1 倍した数を出口から出す」という決まりは

$$y = -x^2$$

という式であらわすことができます。

(4) 「入口から入れた数を 2 乗してさらに $\dfrac{1}{3}$ をかけた数を出口から出す」という決まりは

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

という式であらわすことができます。

本文へ戻る

問 4. 関数の決まりを言葉で言う問題でした。

(1) $y = -4x - 1$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を -4 倍してさらに 1 をひいた数を出口から出す

ということです。

(2) $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を $\dfrac{3}{4}$ 倍してさらに $\dfrac{1}{2}$ をたした数を出口から出す

ということです。

(3) $y = \dfrac{1}{4}x^2$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を 2 乗してさらに $\dfrac{1}{4}$ をかけた数を出口から出す

ということです。

(4) $y = -3x^2$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を 2 乗してさらに -3 をかけた数を出口から出す

ということです。

本文へ戻る

問 5. $y = 2x - 1$ という数式で表されている関数では、入口から、$x = -4$、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

本文へ戻る

問 6. $y = 2x^2$ という数式で表されている関数では、入口から、$x = -4$、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	32	18	2	0	2	18	32

本文へ戻る

問 7. $y = 2x - 3$ という数式で表されている関数について考える問題でした。

(1) 入口から、$x = -4$、$x = -3$、$x = -2$、$x = -1$、$x = 0$、$x = 1$、$x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1

(2) 入口から、$x = -4$、$x = -3.5$、$x = -3$、$x = -2.5$、$x = -2$、$x = -1.5$、$x = -1$、$x = 0.5$、$x = 0$、$x = 0.5$、$x = 1$、$x = 1.5$、$x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

(3) 関数 $y = 2x - 3$ で、もし、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下の「ありとあらゆる」全ての数にすると、

出口から出てくる y という数は、-11 以上 1 以下の「ありとあらゆる数」になると思われます。

本文へ戻る

問 8.

(1) 関数 $y=-3x+2$ で x の値を $1\leqq x\leqq 5$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	1	2	3	4	5
y	-1	-4	-7	-10	-13

この表の y の段を見てみると、-1、-4、-7、-10、-13 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $1\leqq x\leqq 5$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-1	-2.5	-4	-5.5	-7	-8.5	-10	-11.5	13

この表の y の段を見てみると、-1、-2.5、-4、-5.5、-7、-8.5、-10、-11.5、-13 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、-13 から -1 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $1\leqq x\leqq 5$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$-13\leqq x\leqq -1$$

であることが悟れるでしょう。

(2) $y=2x-7$ で x の値を $-3\leqq x\leqq 1$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1
y	-13	-11	-9	-7	-5

この表の y の段を見てみると、-13、-11、-9、-7、-5 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-3 \leqq x \leqq 1$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
y	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5

この表の y の段を見てみると、-13、-12、-11、-10、-9、-8、-7、-6、-5 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、-13 から -5 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-3 \leqq x \leqq 1$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$-13 \leqq x \leqq -5$$

であることが悟れるでしょう。

(3) $y = x^2$ で x の値を $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

この表の y の段を見てみると、1、4、9、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。す

ると次の表のようになります。

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16

この表の y の段を見てみると、1、2.25、4、6.25、9、12.25、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、1 から 16 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$1 \leqq x \leqq 16$$

であることが悟れるでしょう。

(4) $y = x^2$ で x の値を $-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4

この表の y の段を見てみると、0、1、4、9 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

この表の y の段を見てみると、0、0.25、1、2.25、4、6.25、9 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、0 から 9 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-3 \leqq x \leqq 2$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$0 \leqq x \leqq 9$$

であることが悟れるでしょう。

(5) $y = x^2$ で x の値を $-4 \leqq x \leqq 4$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

この表の y の段を見てみると、0、1、4、9、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-4 \leqq x \leqq 4$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。(横に長くなるので途中で分けてあります。)

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0
y	16	12.25	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0

0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16

この表の y の段を見てみると、0、0.25、1、2.25、4、6.25、912.25、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、0 から 16 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-4 \leqq x \leqq 4$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y

の変域は

$$0 \leqq x \leqq 16$$

であることが悟れるでしょう。

本文へ戻る

問 9. 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、$y = 3x - 5$ ですよね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をします。そして、「x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

(1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	$\boxed{-2}$	$\boxed{4}$
y		

(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、$y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{初めに出てくる } y \text{ は } \boxed{-11}$$

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、$y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{次に出てくる } y \text{ は } \boxed{7}$$

ですね。つまり、先に $\boxed{-11}$ が出てきて、後に $\boxed{7}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	-2	4
y	$\boxed{-11}$	$\boxed{7}$

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{4} - \left(\boxed{-2} \right) = \boxed{6}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

$\boxed{6}$ 増えている

x	-2 $\cdots\cdots\rightarrow$	4
y	-11	7

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{7} - \left(\boxed{-11} \right) = \boxed{18}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

先に入れた x　　あとに入れた x

6 増えている

x	-2	4
y	-11	7

$\boxed{18}$ 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

$$x \text{ は } \boxed{6} \text{ 増え、} y \text{ は } \boxed{18} \text{ 増える}$$

ということがわかりました。 本文へ戻る

問 10.

(1) 関数 $y = 2x + 5$ で、x を -1 から 5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

6 増えている

x	-1	5
y	3	15

12 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 6 増えていて、そのとき y は 12 増えている

ということになります。

(2) 関数 $y = -3x + 2$ で、x を -5 から -2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

3 増えている

x	-5	-2
y	17	8

9 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 3 増えていて、そのとき y は 9 増えている

ということになります。

(3) 関数 $y = x^2$ で、x を 1 から -4 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

5 減っている

x	1	-4
y	1	16

15 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 5 減っていて、そのとき y は 15 増えている

ということになります。

(4) 関数 $y = x^2$ で、x を 4 から 1 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

3 減っている

x	4	$\dashrightarrow$	1
y	16	$\dashrightarrow$	1

15 減っている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 3 減っていて、そのとき y は 15 減っている

ということになります。

本文へ戻る

問 11.

(1) 関数 $y = 2x - 1$ で、x を -3 から -5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

4 減っている

x	-3	$\dashrightarrow$	-7
y	-5	$\dashrightarrow$	-11

6 減っている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -3 増えていて、そのとき y は -6 増えている

ということになります。

(2) 関数 $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ で、x を 4 から -6 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

10 減っている

x	4	$\dashrightarrow$	-6
y	5	$\dashrightarrow$	0

5 減っている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -10 増えていて、そのとき y は -5 増えている

ということになります。

(3) 関数 $y = 3x^2$ で、x を -3 から -1 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

2 増えている

x	-3	$\dashrightarrow$	-1
y	27	$\dashrightarrow$	3

24 減っている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 2 増えていて、そのとき y は -24 増えている

ということになります。

(4) 関数 $y = 3x^2$ で、x を -1 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

2 減っている

x	-1	-3
y	3	27

24 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -2 増えていて、そのとき y は 24 増えている

ということになります。

本文へ戻る

問 12. 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、$y = 3x - 5$ ですよね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をします。そして、「x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

(1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	$\boxed{-2}$	$\boxed{4}$
y		

(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、$y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x=-2$ を入れるのですから、$y=3x-5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{初めに出てくる } y \text{ は } \boxed{-11}$$

ですね。

次は、入口から $x=4$ を入れるのですから、$y=3x-5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{次に出てくる } y \text{ は } \boxed{7}$$

ですね。つまり、先に $\boxed{-11}$ が出てきて、後に $\boxed{7}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

x	-2	4
y	$\boxed{-11}$	$\boxed{7}$

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{4}-\left(\boxed{-2}\right)=\boxed{6}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

先に入れた x　　あとに入れた x

$\boxed{6}$ 増えている

x	-2	4
y	-11	7

先に出てきた y　　あとに出てきた y

(4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{7} - \left(\boxed{-11}\right) = \boxed{18}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

先に入れた x　　あとに入れた x

6 増えている

x	-2	4
y	-11	7

$\boxed{18}$ 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

x は $\boxed{6}$ 増え、y は $\boxed{18}$ 増える

ということがわかりました。ということは、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は

$$\frac{\boxed{18}}{\boxed{6}} = \boxed{3}$$

ということになりますね。 本文へ戻る

問 13.

(1) 関数 $y=-2x+3$ で x を 1 から 5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

4 増えている

x	1	5
y	1	-7

-8 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は 4 増えていて、そのとき y は -8 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-8}{4}=2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y=-2x+3$ で x を 1 から 5 へ変える場合、変化の割合は 2 である

ということになります。

(2) 関数 $y=-2x+3$ で x を -3 から -6 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

-3 増えている

x	-3	-6
y	9	15

6 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は -3 増えていて、そのとき y は 6 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

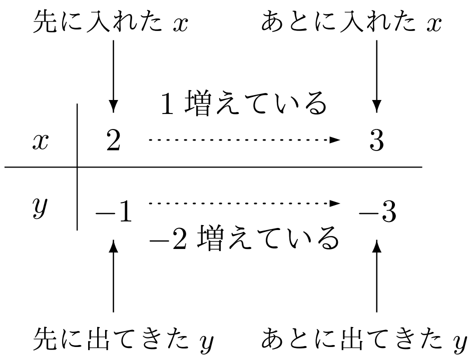
$$\frac{6}{-3} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 3$ で x を -3 から -6 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

(3) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。



というわけで、

x は 1 増えていて、そのとき y は -2 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-2}{1} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

(4) 関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

2 増えている

x	5	7
y	-3	-7

-4 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は 2 増えていて、そのとき y は -4 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-4}{2} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

(5) 関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

-5 増えている

x	3	-2
y	-10	0

10 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は -5 増えていて、そのとき y は 10 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{10}{-5} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

(6) 関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

2 増えている

x	1	3
y	-2	-18

-16 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は 2 増えていて、そのとき y は -16 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-16}{2} = -8$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える場合、変化の割合は -8 である

ということになります。

(7) 関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

3 増えている

x	-1	2
y	-2	-8

-6 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は 3 増えていて、そのとき y は -6 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-6}{3} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

(8) 関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

-5 増えている

x	2	-3
y	-8	-18

-10 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は -5 増えていて、そのとき y は -10 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-10}{-5} = 2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える場合、変化の割合は 10 である

ということになります。

(9) 関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　あとに入れた x

3 増えている

x	0	3
y	0	3

3 増えている

先に出てきた y　あとに出てきた y

というわけで、

x は 3 増えていて、そのとき y は 3 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{3}{3} = 1$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える場合、変化の割合は 1 である

ということになります。

(10) 関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を 3 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

先に入れた x　　あとに入れた x

6 増えている

x	-3	3
y	3	3

0 増えている

先に出てきた y　　あとに出てきた y

というわけで、

x は 6 増えていて、そのとき y は 0 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{0}{6} = 0$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ で x を -3 から 3 へ変える場合、変化の割合は 0 である

ということになります。

本文へ戻る

問 14. $y = -2x + 3$ という数式で表される関数では、入口から入れる x の値として -3、-2、-1、0、1、2、3 を入れると出口から出てくる y の値は次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

本文へ戻る

問 15. $y = -2x + 3$ という数式で表される関数について、「関数の表」を見て y の値がどのように変化していくのか考える問題でした。

(1)「関数の表」

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

の y の段を見るとわかるように、

$y = -2x + 3$ では、x の値が増えるにつれて、y の値はだんだん減っていく。

(2) 「関数の表」

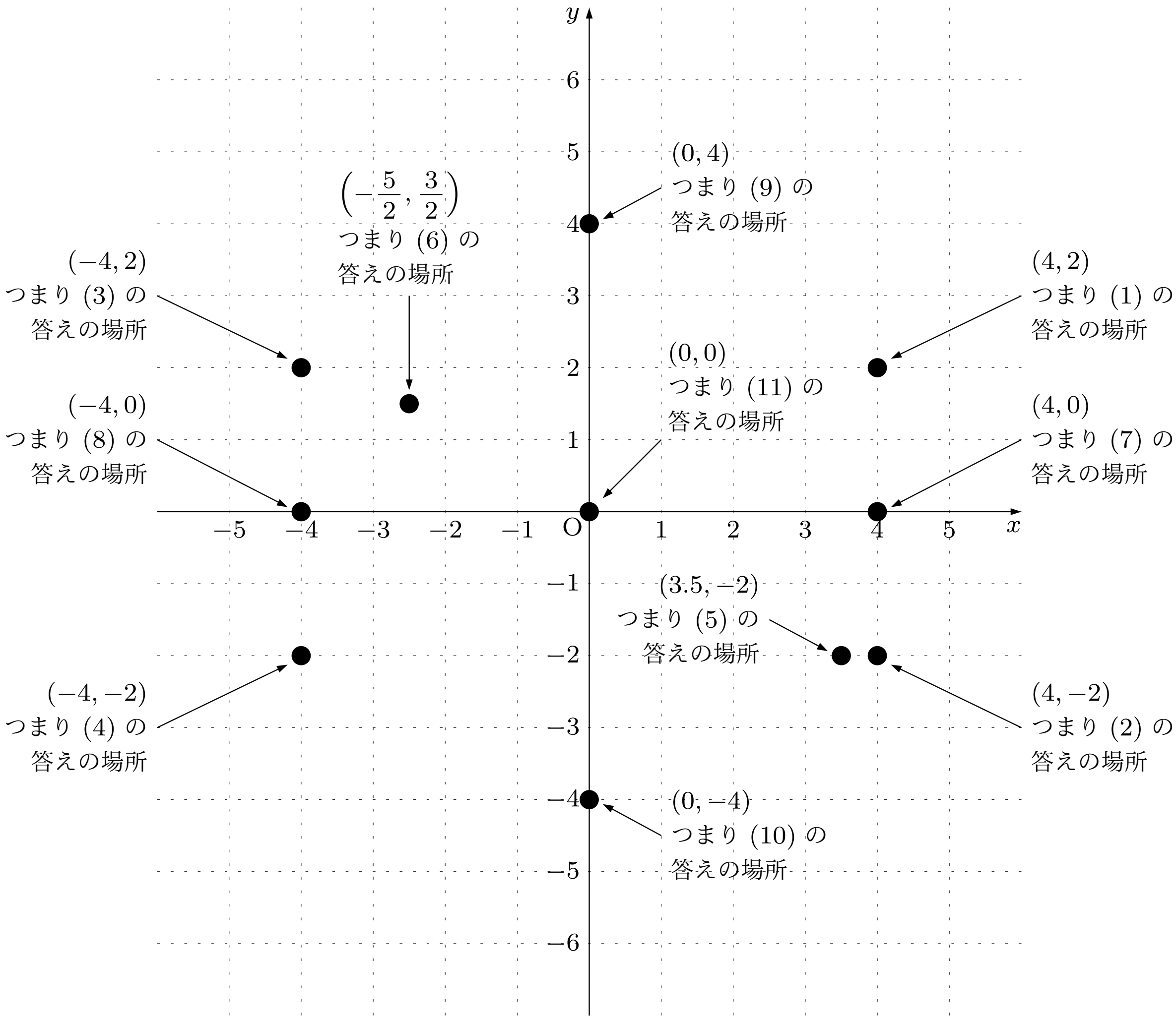
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

の y の段を見るとわかるように、

$y = -2x + 3$ では、x の値がとにかく 1 増えると、y の値は 2 減るようである。

本文へ戻る

問 16. 座標平面の上に点を打つ問題でした。



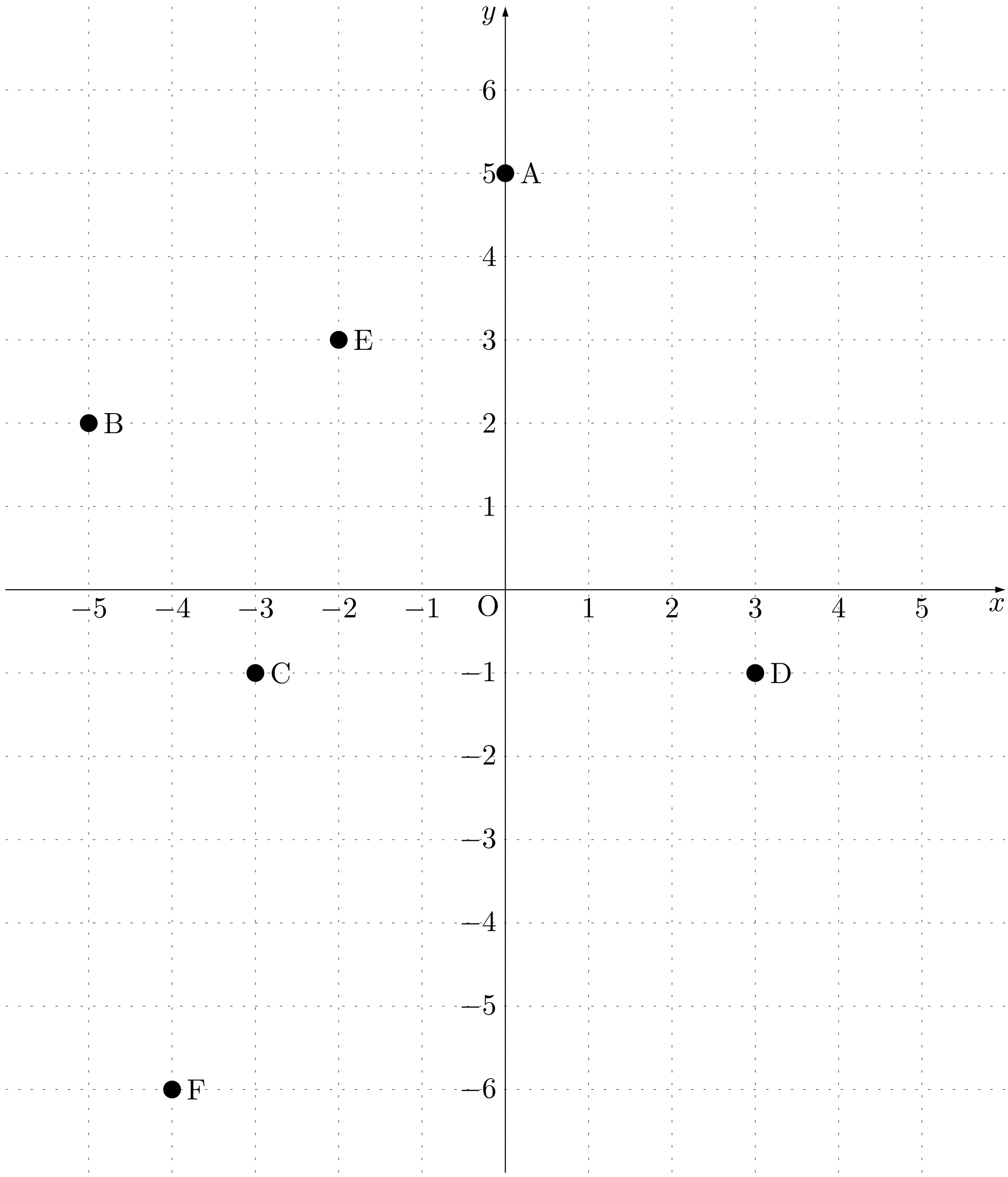
本文へ戻る

問 17. 座標平面上に点を打つ問題でした。

(1) $\mathrm{A}(0,5)$　(2) $\mathrm{B}(-5,2)$　(3) $\mathrm{C}(-3,-1)$

(4) $\mathrm{D}(3,-1)$　(5) $\mathrm{E}(-2,3)$　(6) $\mathrm{F}(-4,-6)$

の場所は以下のとおりです。

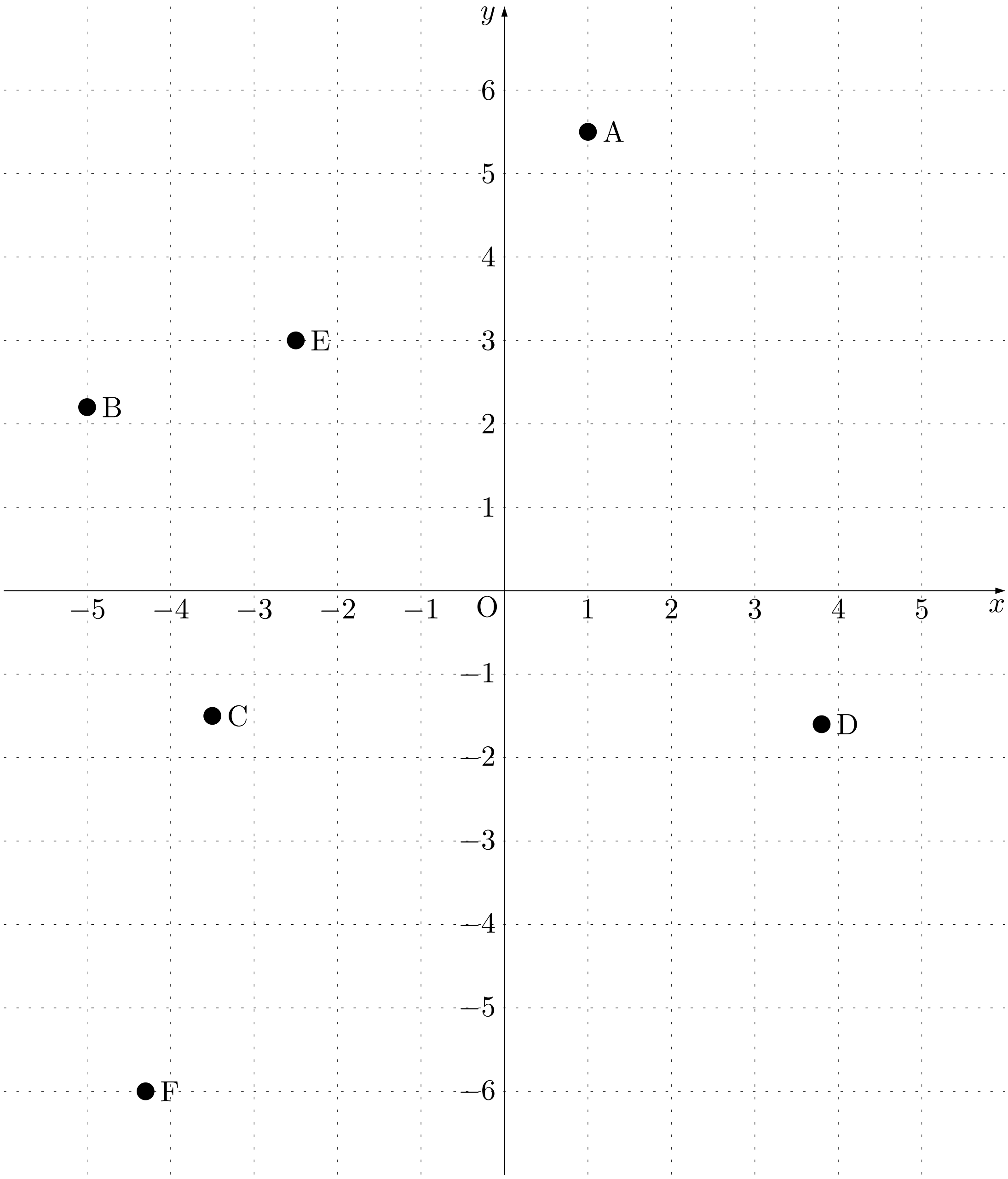


本文へ戻る

問 18. 座標平面上に点を打つ問題でした。

(1) A$(1, 5.5)$ (2) B$(-5, 2.2)$ (3) C$(-3.5, -1.5)$
(4) D$(3.8, -1.6)$ (5) E$(-2.5, 3)$ (6) F$(-4.3, -6)$

の場所は以下のとおりです。



本文へ戻る

問 19. 座標平面に点を打つ問題でした。

(1) $\mathrm{A}\left(1, \dfrac{7}{2}\right)$ (2) $\mathrm{B}\left(-5, \dfrac{3}{4}\right)$ (3) $\mathrm{C}\left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{4}{5}\right)$

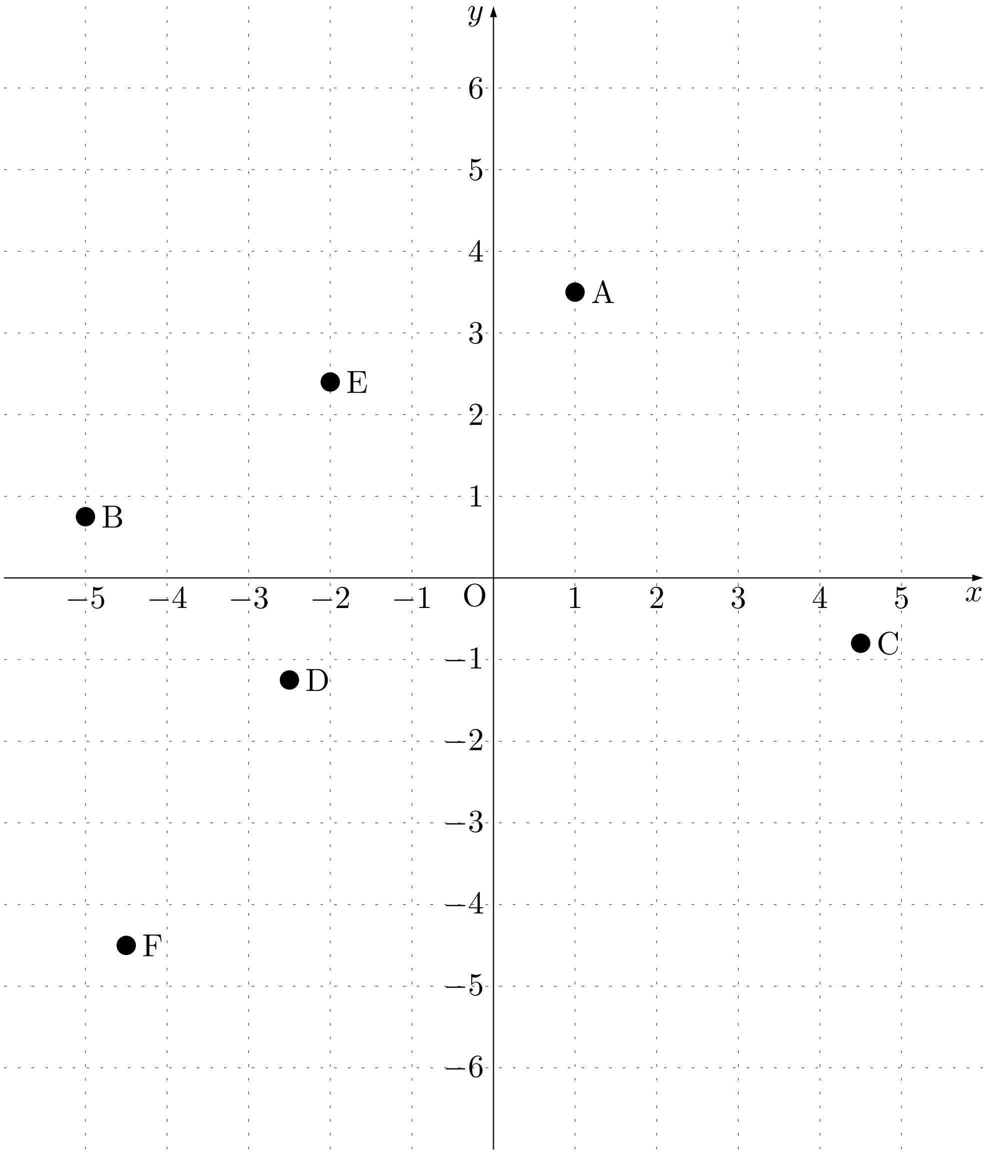
(4) $\mathrm{D}\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$ (5) $\mathrm{E}\left(-2, \dfrac{12}{5}\right)$ (6) $\mathrm{F}\left(-4.5, -\dfrac{9}{2}\right)$

というそれぞれ点の座標を小数であらわすと

(1) $\mathrm{A}(1, 3.5)$ (2) $\mathrm{B}(-5, 0.75)$ (3) $\mathrm{C}(4.5, -0.8)$

(4) $\mathrm{D}(-2.5, -1.25)$ (5) $\mathrm{E}(-2, 2.4)$ (6) $\mathrm{F}(-4.5, -4.5)$

となります。よってこれらの点の場所は以下のとおりです。

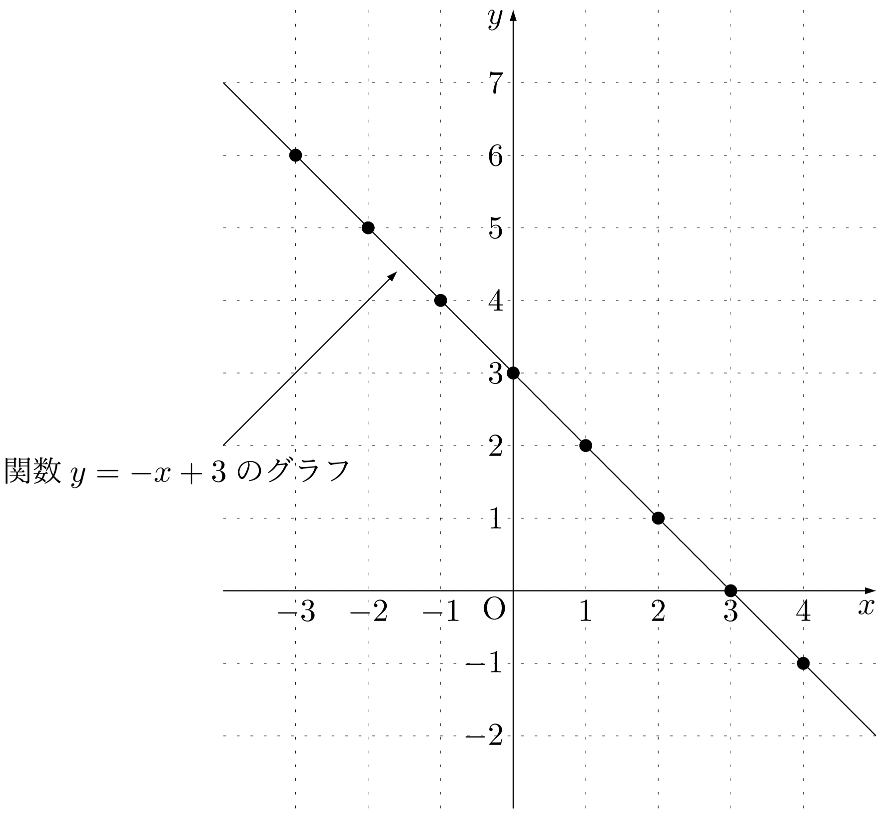


本文へ戻る

問 20. x の範囲を -3 から 4 までにして、x の値を 1 きざみで変えて調べると、「関数 $y=-x+3$ の表」は次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	6	5	4	3	2	1	0	-1	$\cdots$

そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y=-x+3$ のグラフ」は次のようになります。

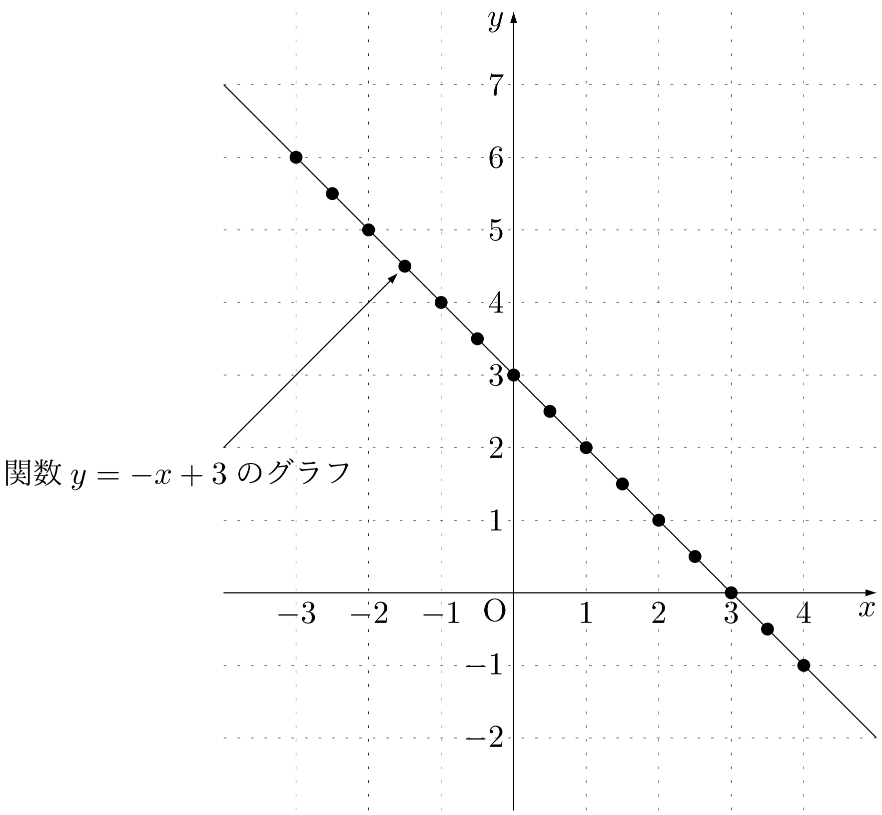


本文へ戻る

問 21. x の範囲を -3 から 4 までにして、x の値を 0.5 きざみで変えて調べると、「関数 $y=-x+3$ の表」は次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	$\cdots$
y	$\cdots$	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	$\cdots$

そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y=-x+3$ のグラフ」は次のようになります。

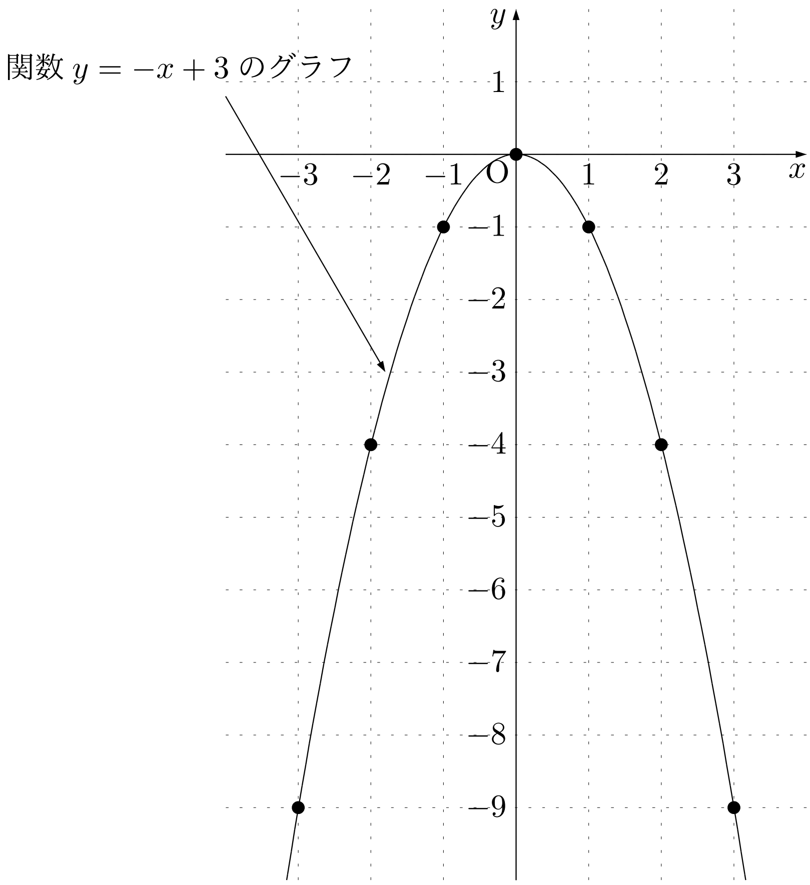


本文へ戻る

問 22. x の範囲を -3 から 4 までにして、x の値を 1 きざみで変えて調べると、「関数 $y=-x^2$ の表」は次のようになります。

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

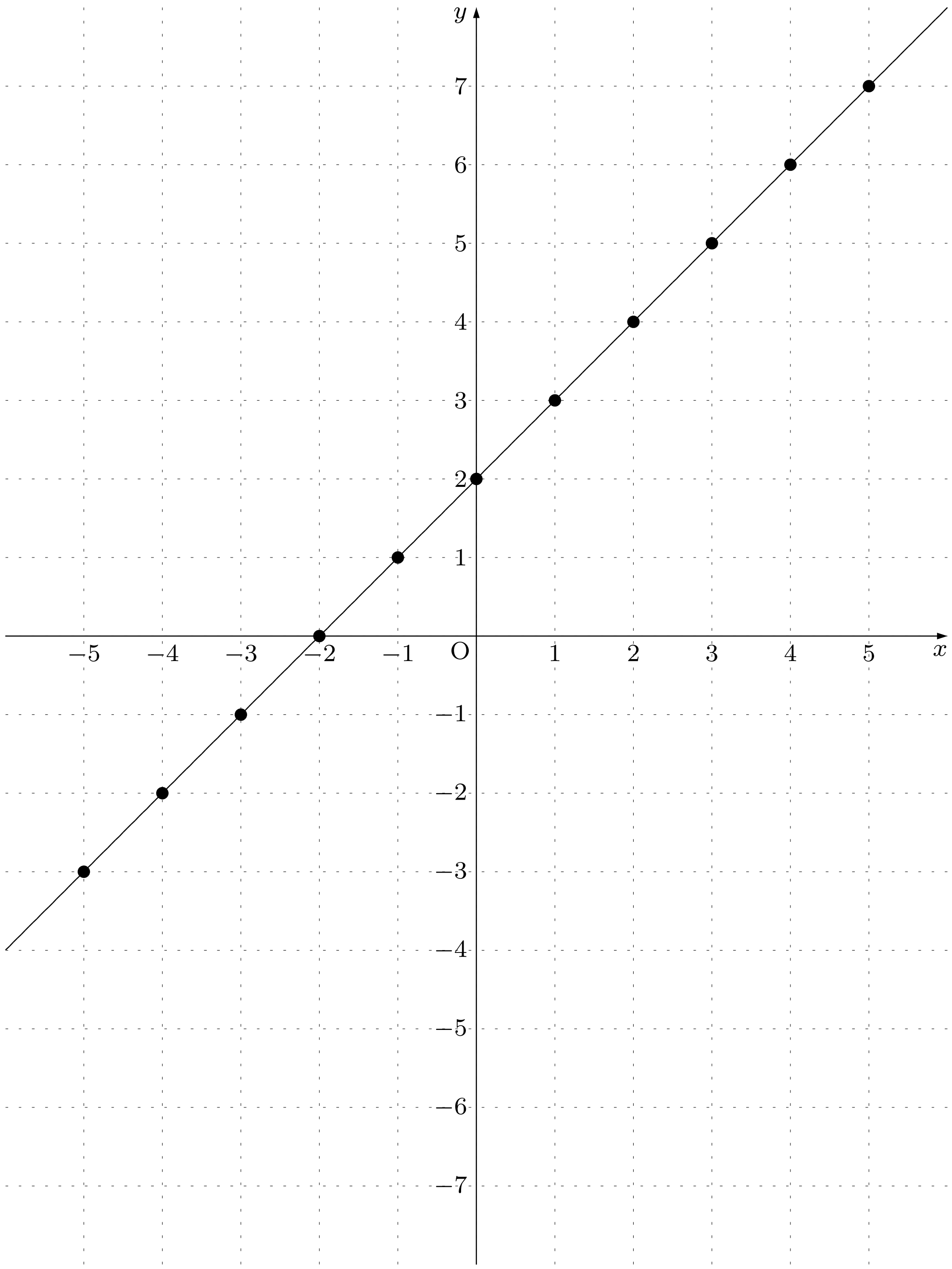
そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y=-x+3$ のグラフ」は次のようになります。



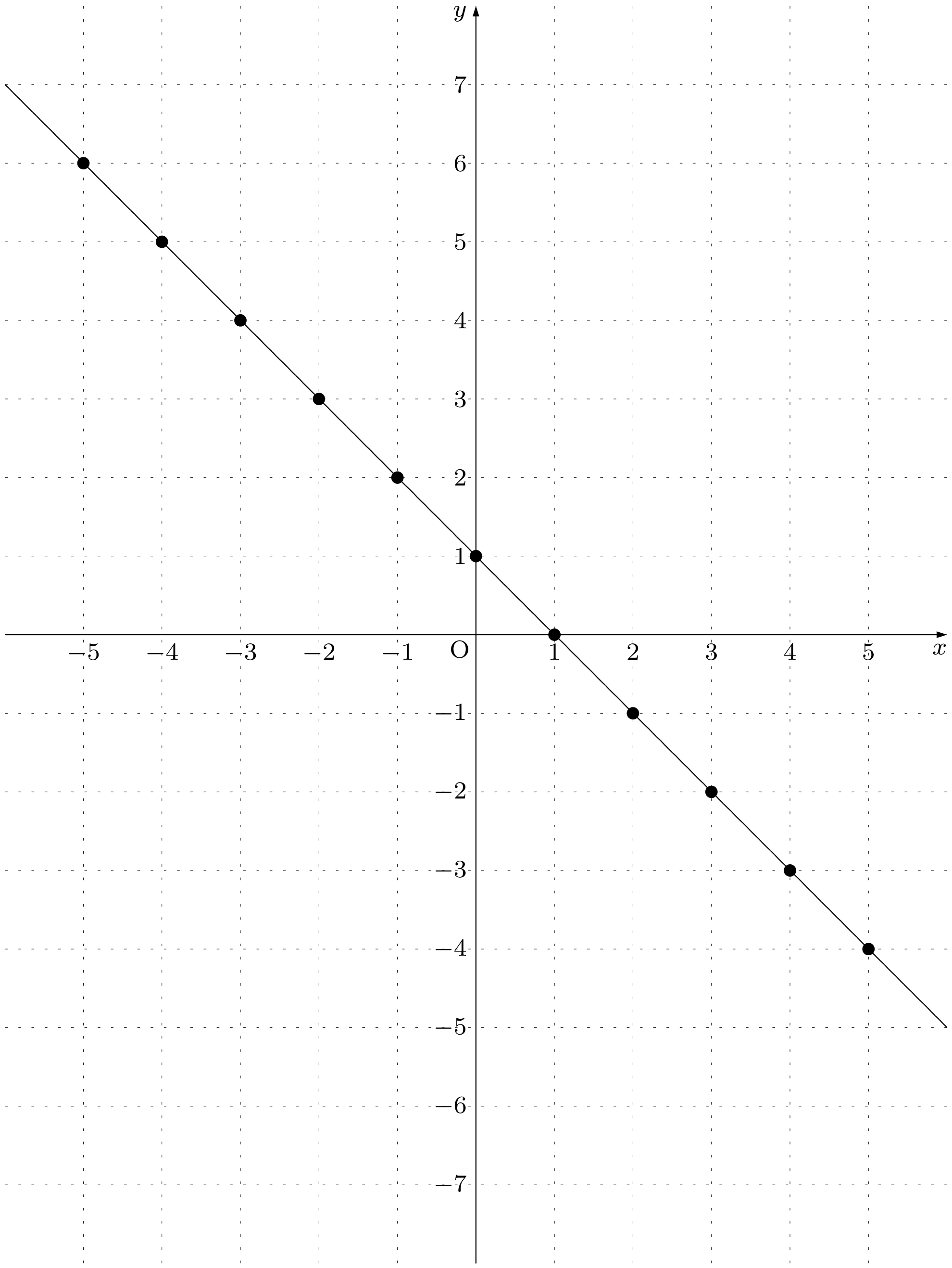
本文へ戻る

問 23. 関数のグラフを作る問題でした。

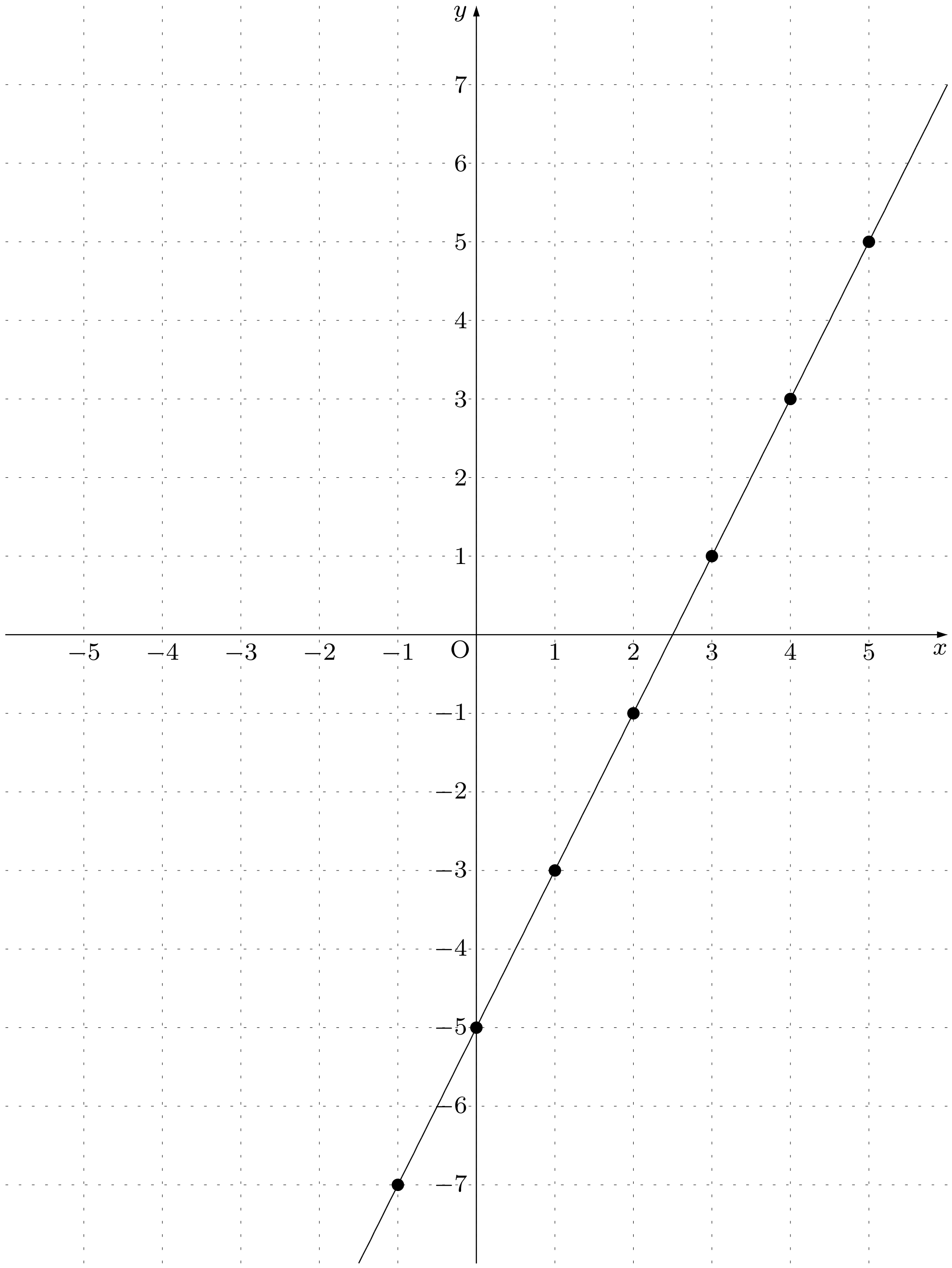
(1) 関数 $y=x+2$ のグラフ



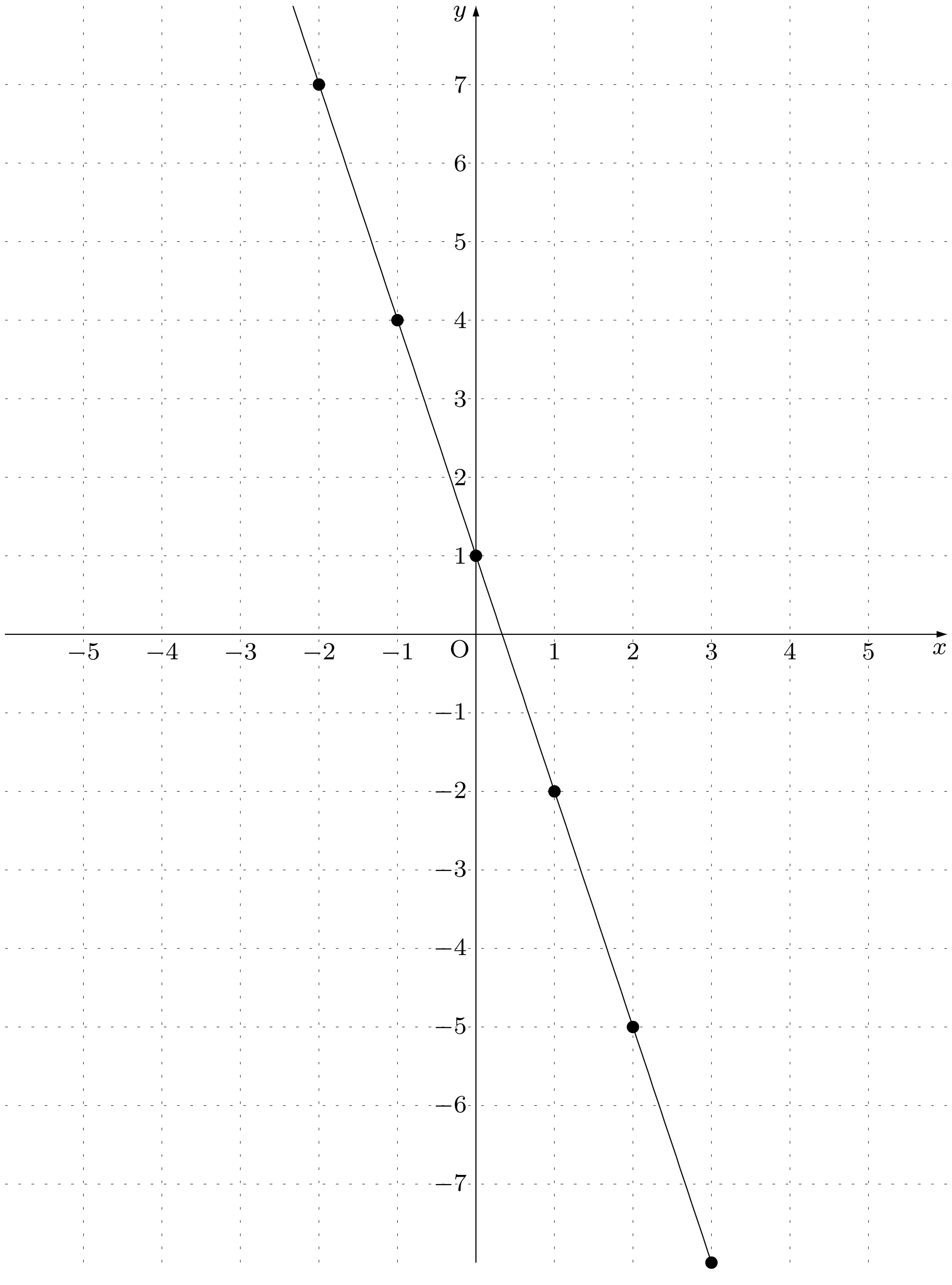
(2) 関数 $y = -x + 1$ のグラフ



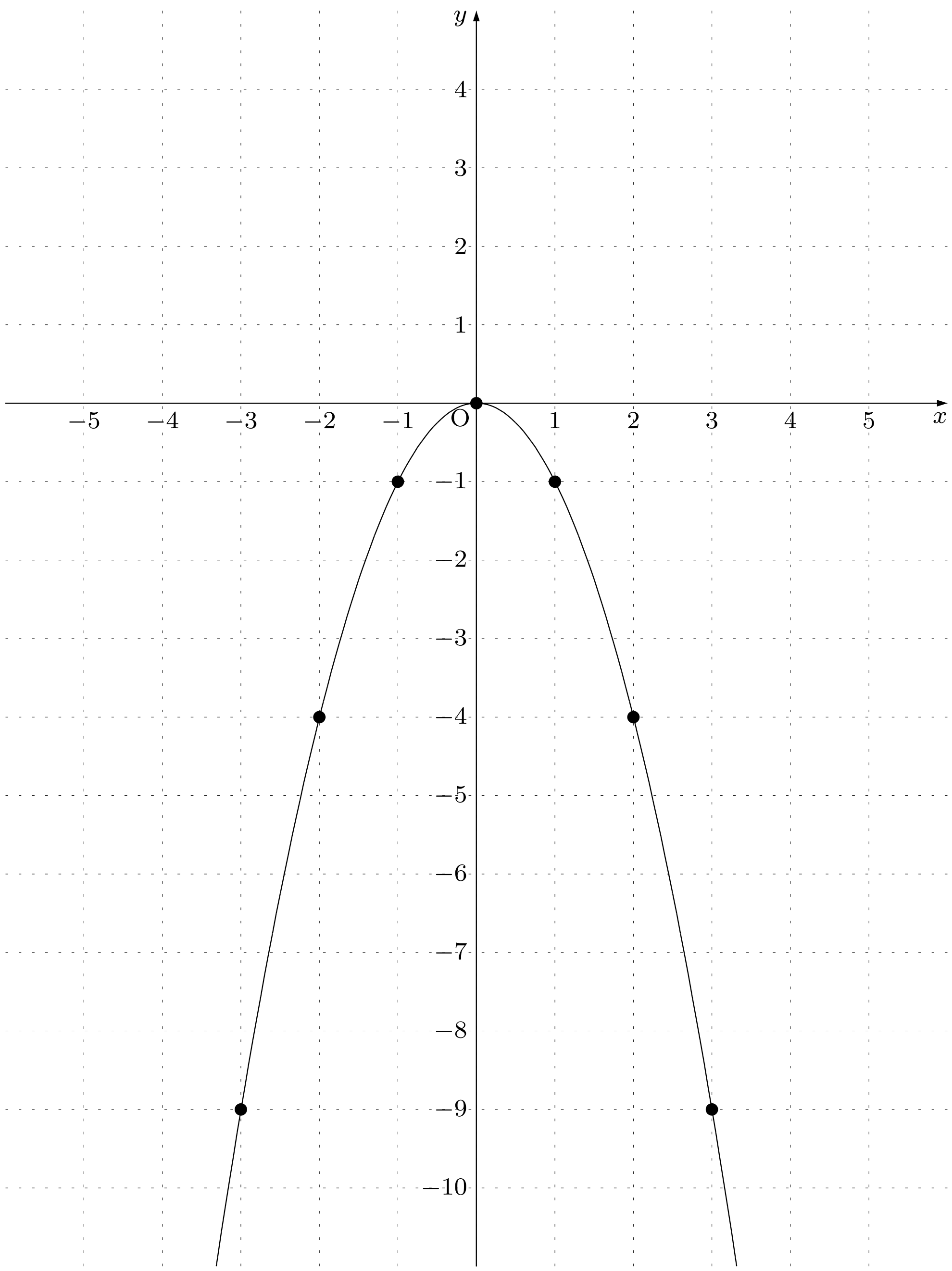
(3) 関数 $y = 2x - 5$ のグラフ



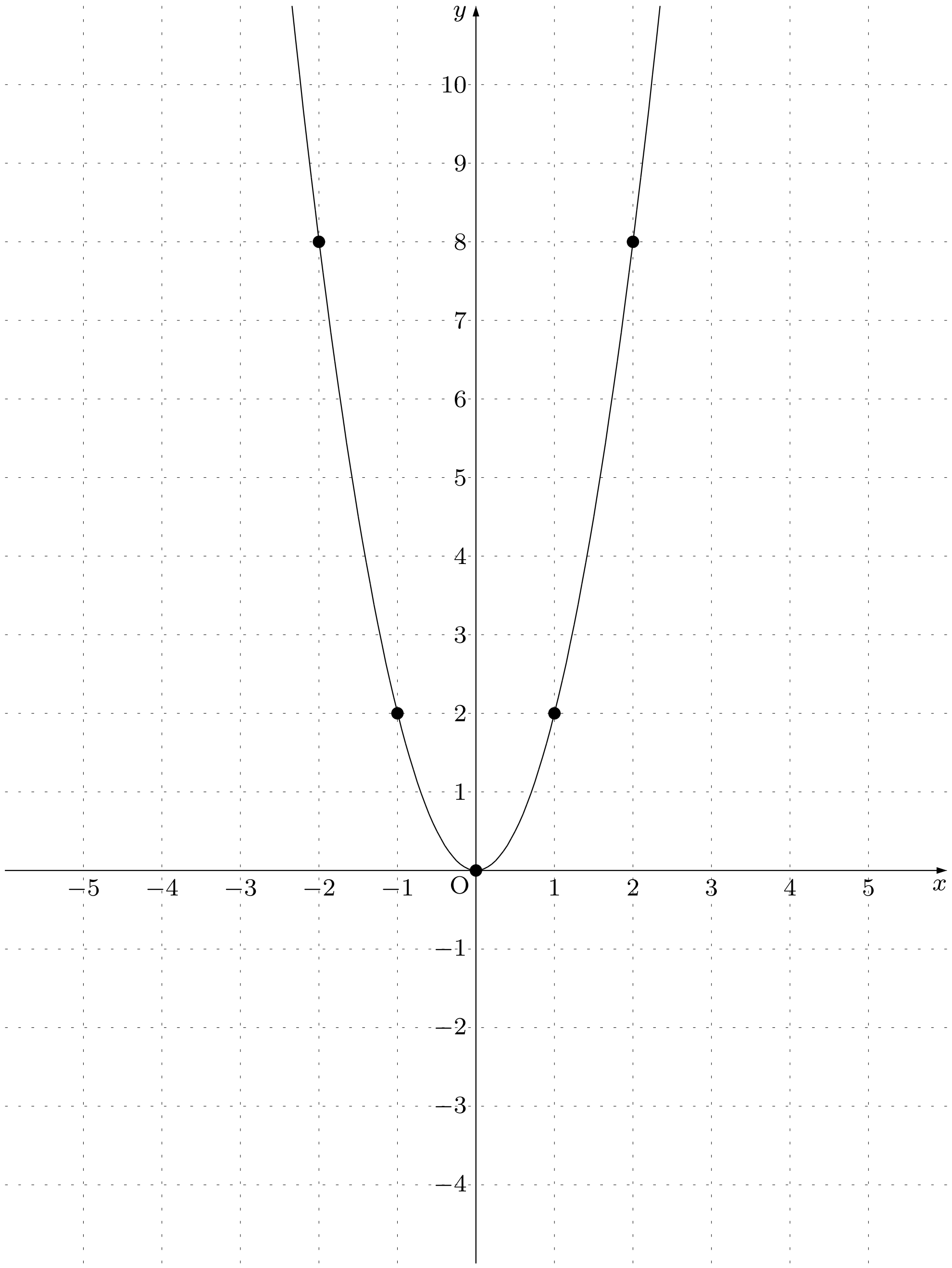
(4) 関数 $y = -3x + 1$ のグラフ



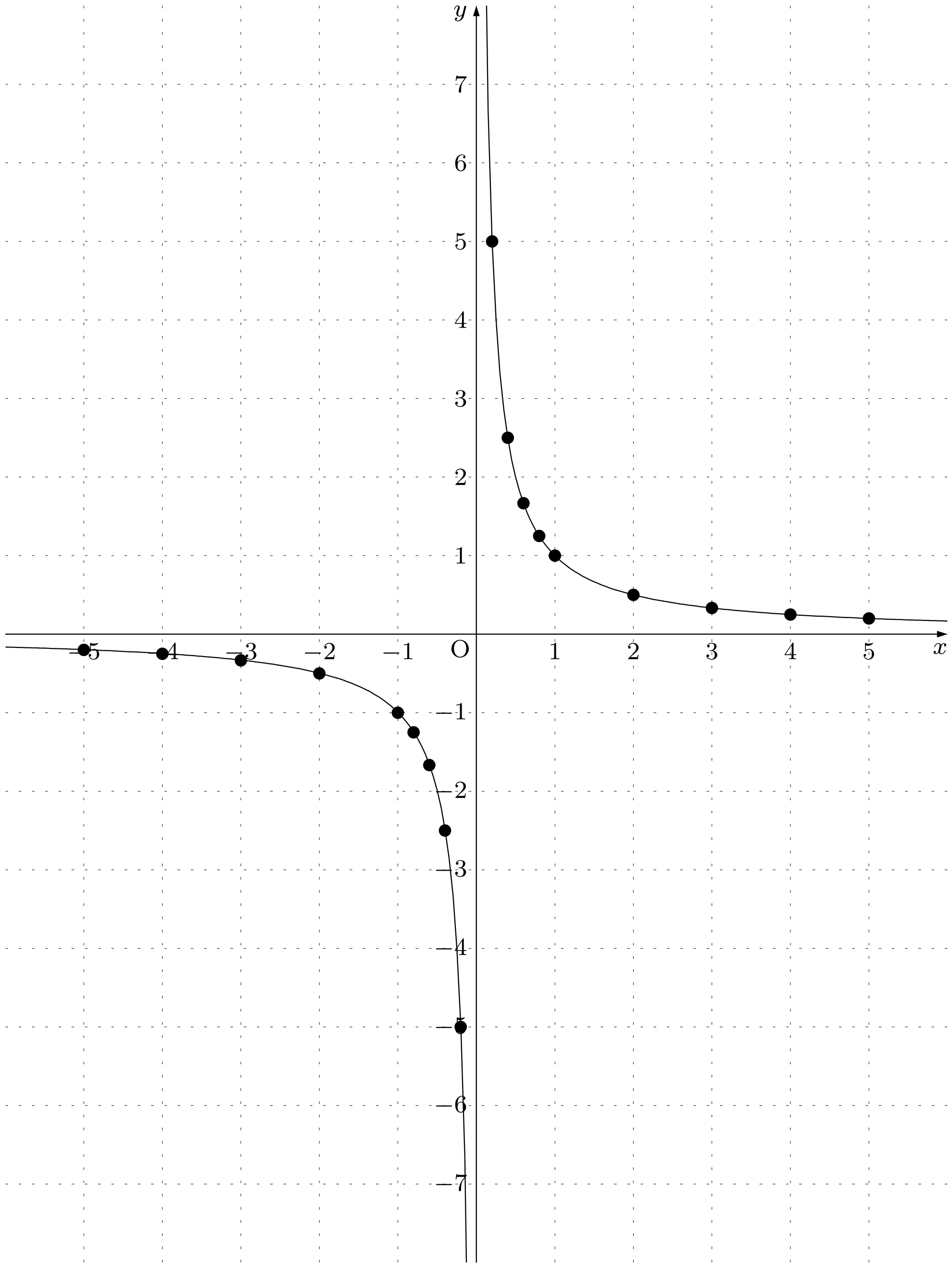
(5) 関数 $y = -x^2$ のグラフ



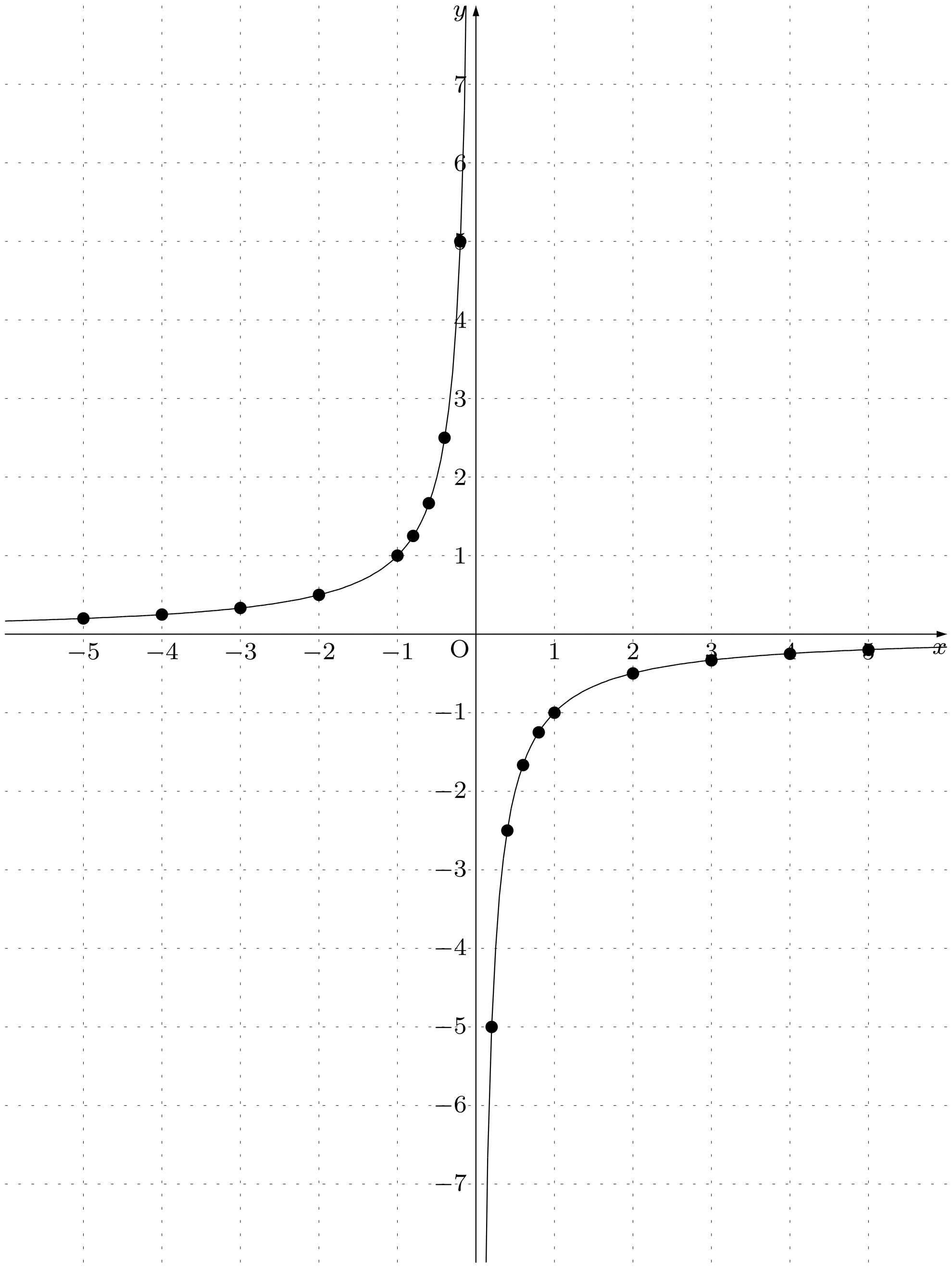
(6) 関数 $y = 2x^2$ のグラフ



(7) 関数 $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ



(8) 関数 $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフ



本文へ戻る

問 24. 「入口から入れた数を $\frac{1}{2}$ 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の $\boxed{\text{仲間}}$ です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{2}$ が出てきます。また、入口から -7 を入れると、出口から $\boxed{-\frac{7}{2}}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{-\frac{1}{2}x}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x}$$

となります。 本文へ戻る

問 25. 「入口から入れた数を -2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は比例の $\boxed{\text{仲間}}$ です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から $\boxed{-2}$ が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から $\boxed{6}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{-2x}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{y = -2x}$$

となります。 本文へ戻る

問 26.

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 2 をひいて出口から出す」という「決まり」の関数は比例の $\boxed{\text{仲間}}$ では $\boxed{\text{ありま}}$ せん。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{10}$ が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から $\boxed{-11}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{3x-2}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{y = 3x - 2}$$

となります。 本文へ戻る

問 27. $y = ax$ 本文へ戻る

問 28. ①と③

本文へ戻る

問 29.

(1) $y = -2x$ という式で表される比例の「比例定数」は -2

(2) $y = \dfrac{1}{3}x$ という式で表される比例の「比例定数」は $\dfrac{1}{3}$

(3) $y = 5x$ という式で表される比例の「比例定数」は 5

本文へ戻る

問 30.

(1) この関数では、y は x に比例するのですよね。ということは、この関数では、いつも y は x のナントカ倍になっているということですね。つまり、何か、ある数 a があって、

$$y = ax \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表されるということになります。a がいくつなのかは、今の所わかりません。しかし、問題にはまだ手がかりが書いてあります。$x = 3$ のとき、$y = -18$ になるということですから、①式で x を 3 にすると、y として -18 が出てくることになります。つまり、

$$-18 = a \times 3$$

となっているはずです。この式を使えば、謎の数 a を求めることができますね。まず、左と右を入れかえて、

$$a \times 3 = -18$$

とします。かけざんのマークをやめると、

$$3a = -18$$

ということですね。

次に左と右を 3 でわると、

$$a = -6$$

となります。これで、謎の数 a の正体がわかりました。これが比例定数ですよね。

つまり、比例定数は -6 だったのです。

a の正体がわかったので、この関数の決まりを表す式も、もうわかりますね。つまり、①式の a は -6 であるということなので、答えはもちろん

$$y = -6x$$

ですよね。

(2) (1) でこの関数は

$$y = -6x$$

という数式で表されることがわかりましたね。ということは、$x = 4$ のとき、y はいくつになるのか知りたければ、この式の x に 4 を代入して y がいくつになるのか計算すればよいわけです。というわけで、

$$y = -\,6 \times 4 = -24$$

となります。

(3) (1) でこの関数は

$$y = -6x$$

という数式で表されることがわかりましたね。ということは、$y = 30$ のとき、x はいくつだったのか知りたければ、この式の y に 30 を代入して x がいくつだったのか計算すればよいわけです。というわけで、とりあえず

$$30 = -\,6x$$

となります。この式をもとにして、謎の数 x を発見すれば良いわけです。

まず、左と右を入れ替えて.

$$-6x = 30$$

とします。そして左と右を -6 でわると

$$x = -5$$

となります。これがこの問題の答えですね。

(4)　変域の調べ方はこのテキストの「1.2 関数の変域」で詳しく学びました。忘れてしまった人は 11 ページを開いて復習してください。

x の変域が $-2 \leqq x \leqq 5$ ですから x の値をいろいろこの範囲で変えた時に「出口から出てくる y の値」はどうなるのか調べます。

この問題の関数は

$$y = -6x$$

という数式で表されるということがわかっているのですから、この式をつかって関数の表を作ります。ここでは x の値を 1 きざみで変えて調べてみます。すると次のようになるはずです。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	6	0	-6	-12	-18	-24	-30

この表の y の段を見ると、y は -30 以上 12 以下の数になるということが悟れるでしょう。つまりこの問題の答えは

$$y \text{ の変域は } -30 \leqq y \leqq 12$$

ということです。

本文へ戻る

問 31.

(1) $y = -2x$ の表は次のようになります。

$y=-2x$ の表

3 倍　2 倍　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	12	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	$\cdots$

2 倍　3 倍　2 倍　3 倍　4 倍

表から想像できるように、「関数 $y=-2x$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こります。

「関数 $y=-2x$」という式は「$y=ax$」という形をしているので比例の仲間です。

(2) $y=-2x+1$ の表は次のようになります。

$y=-2x$ の表

3 倍　2 倍　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	$\cdots$

2 倍にならない　3 倍にならない　2 倍にならない　3 倍にならない　4 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y=-2x+1$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y=-2x+1$」という式は「$y=ax$」という形をしていないので比例の仲間ではありません。

(3) $y=2x^2$ の表は次のようになります。

$y=-2^2x$ の表

3 倍　2 倍　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	72	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50	72	$\cdots$

2 倍にならない　3 倍にならない　2 倍にならない　3 倍にならない　4 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y=-2x^2$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y=-2x^2$」という式は「$y=ax$」という形をしていないので比例の仲間ではありません。

(4) $y=-\dfrac{1}{2}x$ の表は次のようになります。

$y=-\dfrac{1}{2}x$ の表

3 倍　2 倍　　4 倍　3 倍　2 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-3	$-\dfrac{5}{2}$	-2	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\dfrac{5}{2}$	3	$\cdots$

2 倍　3 倍　　2 倍　3 倍　4 倍

表から想像できるように、「関数 $y=-\dfrac{1}{2}x$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こリます。

「関数 $y=-\dfrac{1}{2}x$」という式は「$y=ax$」という形をしているので比例の仲間です。

(5) $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ の表は次のようになります。

$y=-\dfrac{1}{2}x+3$ の表

3 倍　2 倍　　4 倍　3 倍　2 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	6	$\dfrac{11}{2}$	5	$\dfrac{9}{2}$	4	$\dfrac{7}{2}$	3	$\dfrac{5}{2}$	2	$\dfrac{3}{2}$	1	$\dfrac{1}{2}$	0	$\cdots$

2 倍にならない　3 倍にならない　　2 倍にならない　3 倍にならない　4 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$」という式は「$y=ax$」という形をしていないので比例の仲間ではありません。

(6) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の表は次のようになります。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ の表

3 倍　2 倍　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
y	$\cdots$	18	$\frac{25}{2}$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	18	$\cdots$

2 倍にならない　3 倍にならない　2 倍にならない　3 倍にならない　4 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値も 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていく

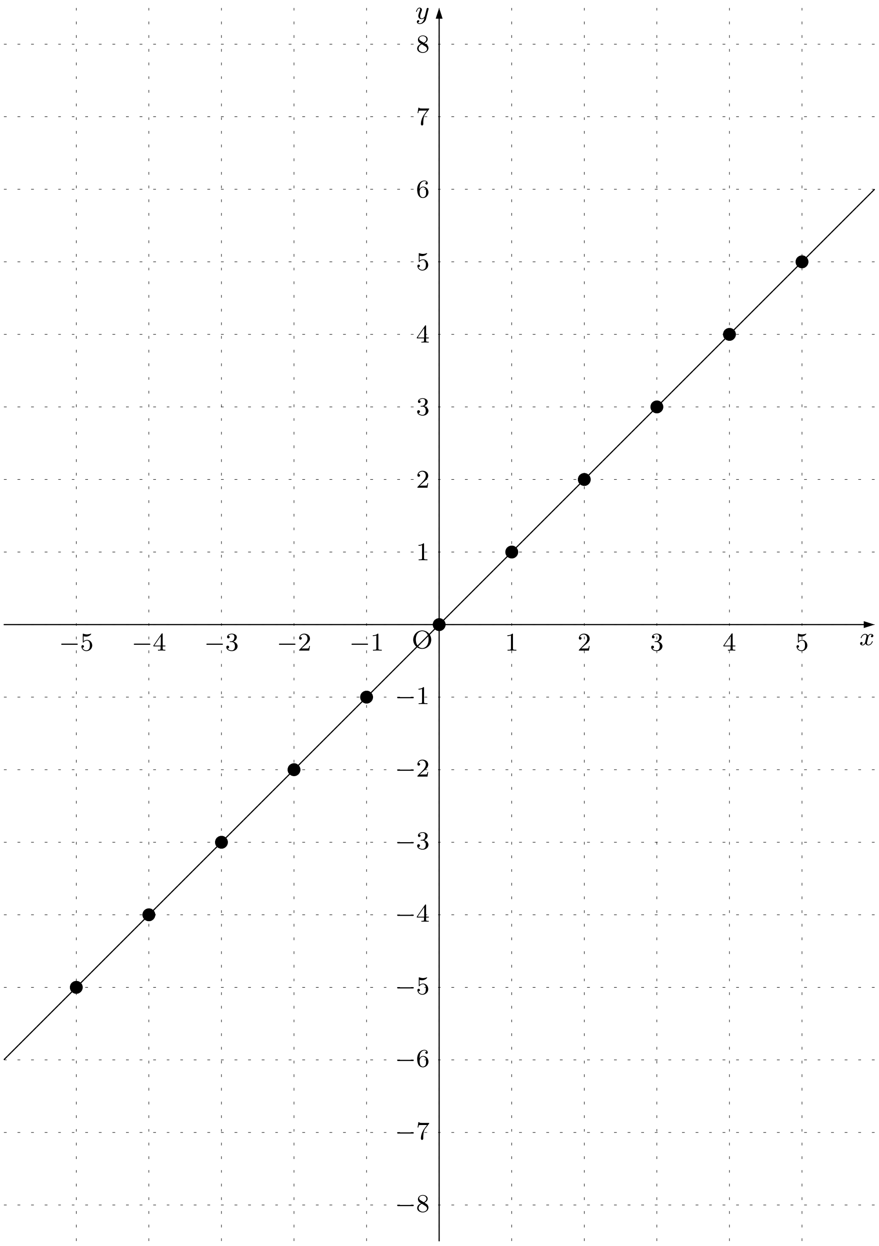
ということは起こりません。

「関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$」という式は「$y=ax$」という形をしていないので比例の仲間ではありません。

本文へ戻る

問 32.

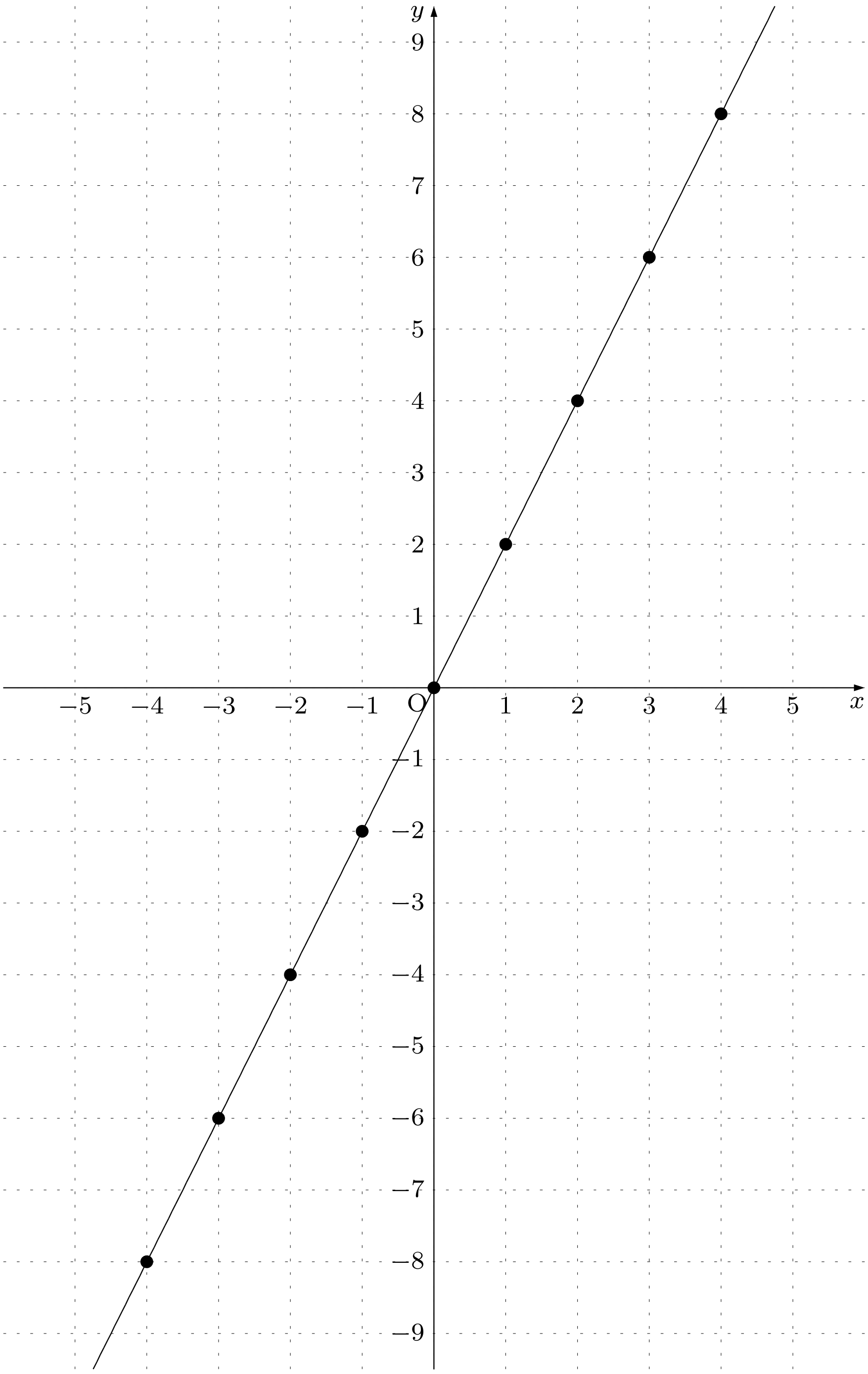
① 関数 $y = x$ のグラフ



原点 O$(0, 0)$ を通る直線になる。

全体的に右上がりである。

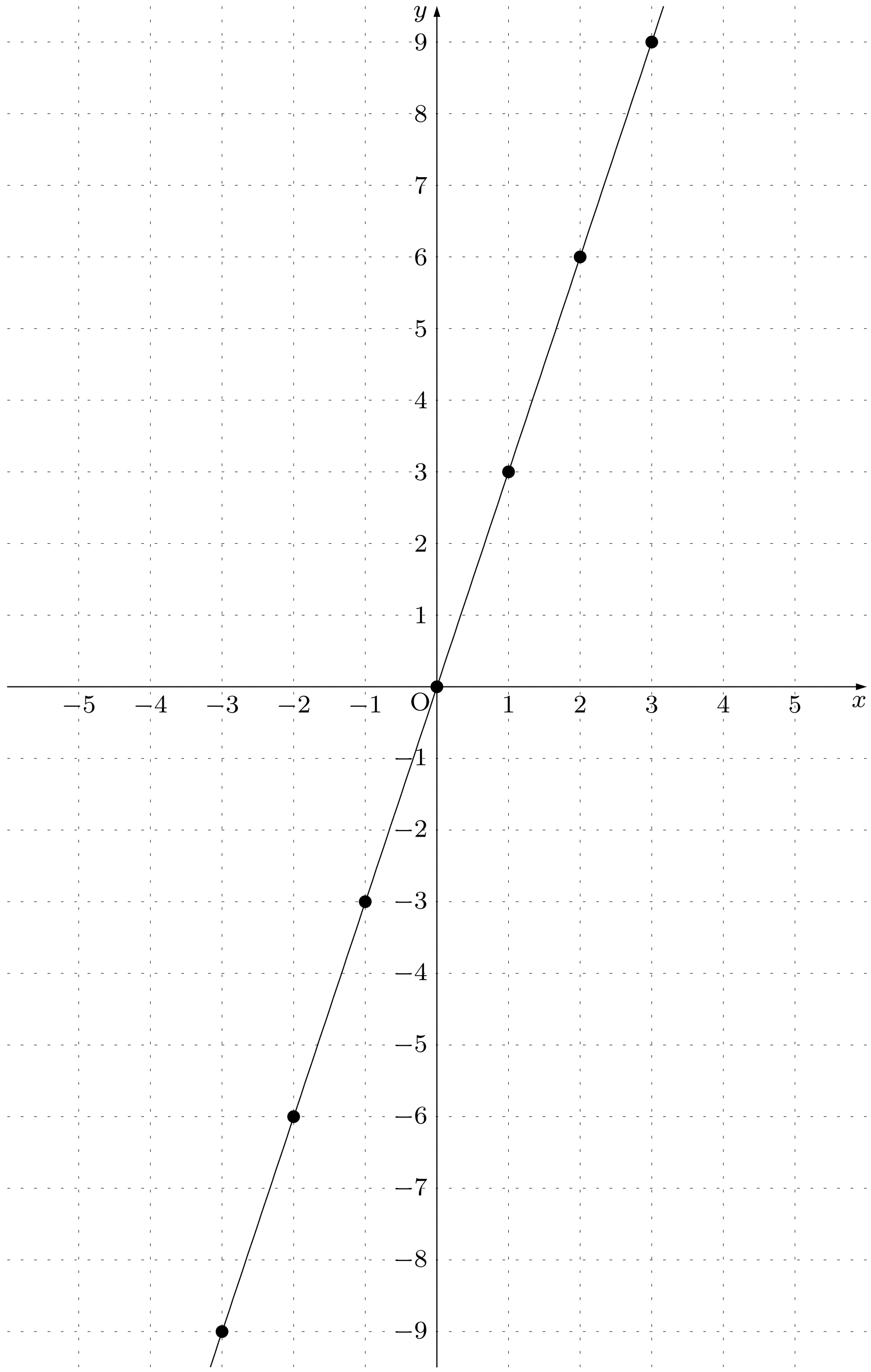
② 関数 $y = 2x$ のグラフ



原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を通る直線になる。

全体的に右上がりである。

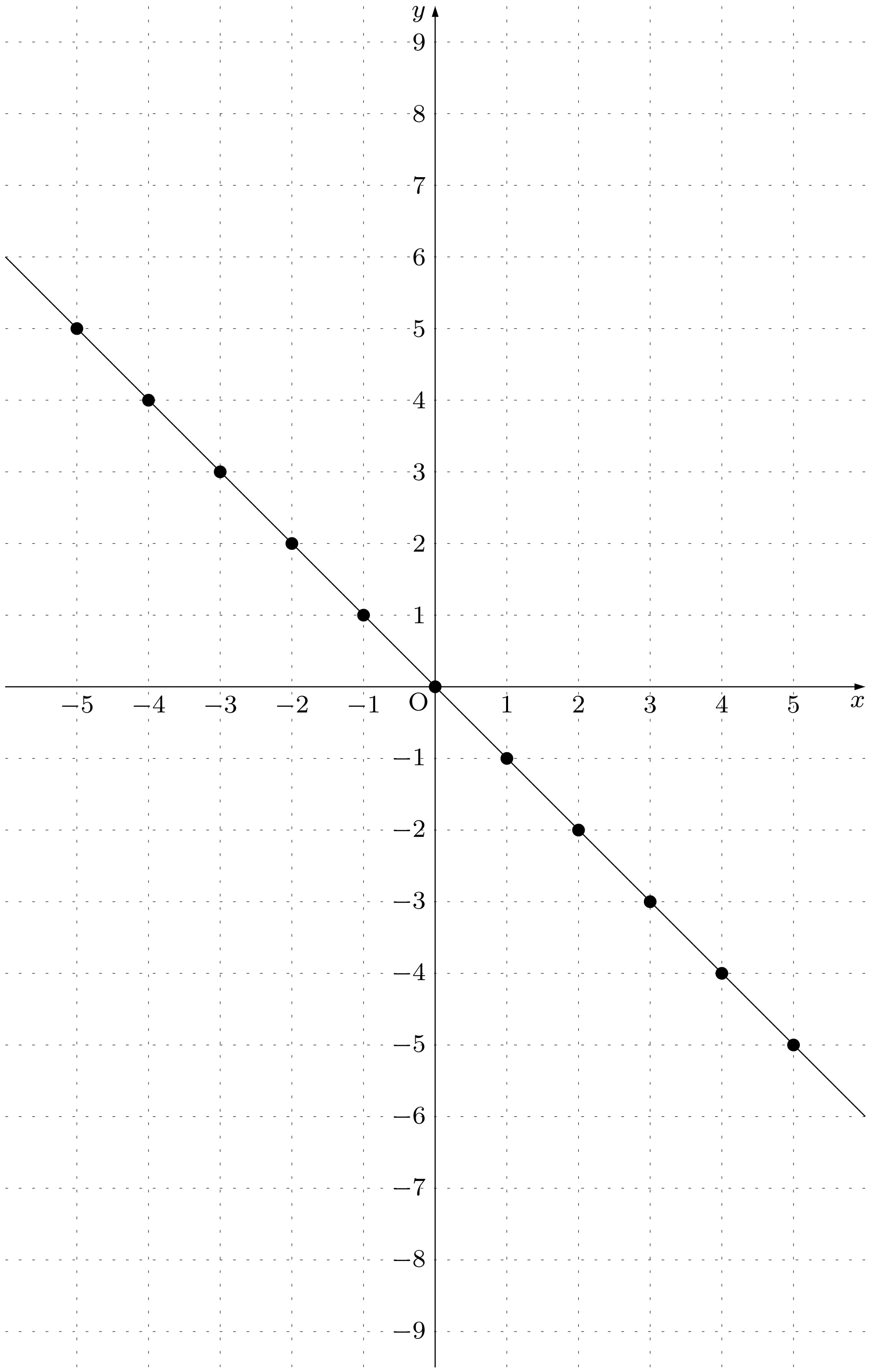
③ 関数 $y = 3x$ のグラフ



原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ を通る直線になる。

全体的に右上がりである。

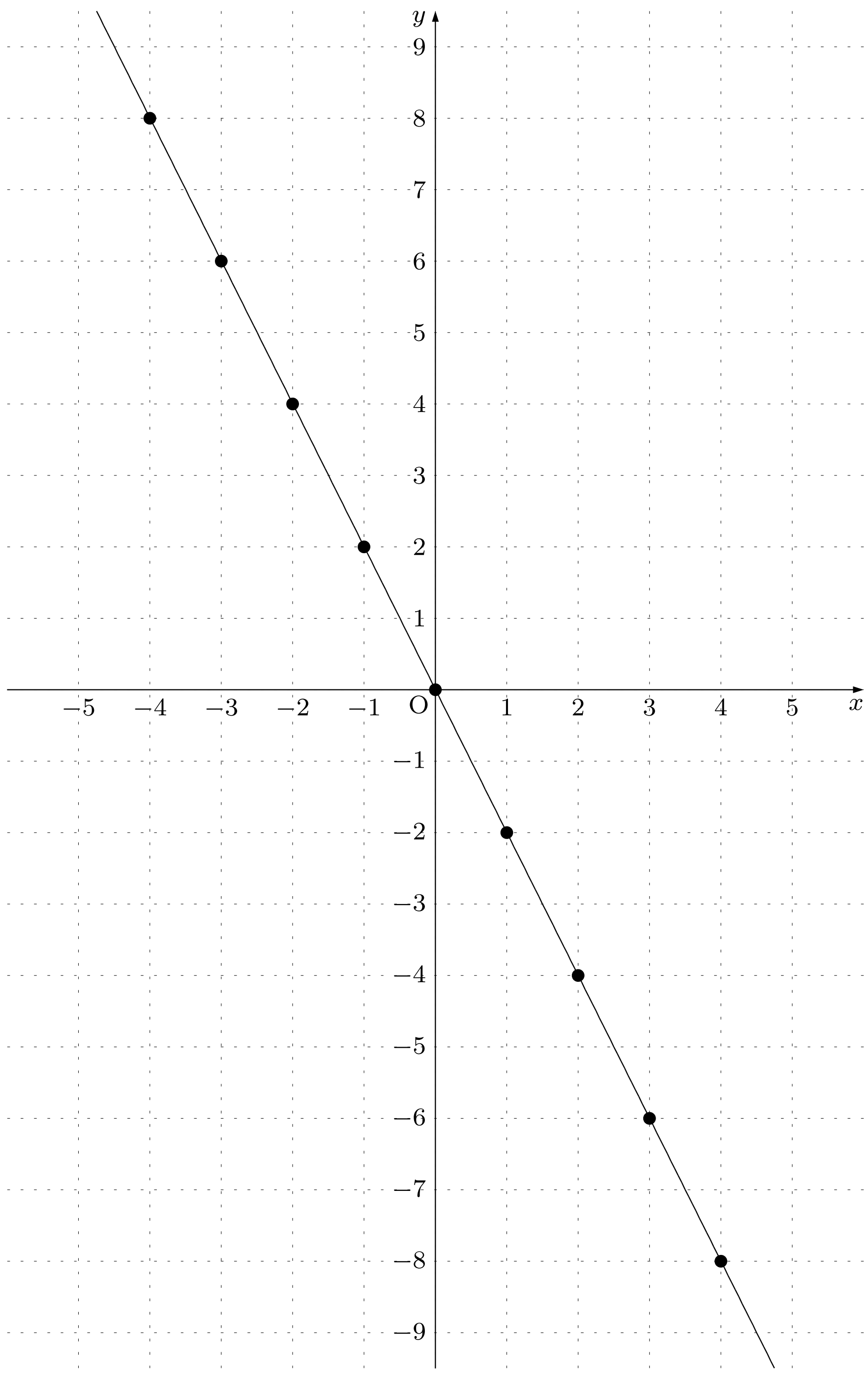
④ 関数 $y=-x$ のグラフ



原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を通る直線になる。

全体的に右下がりである。

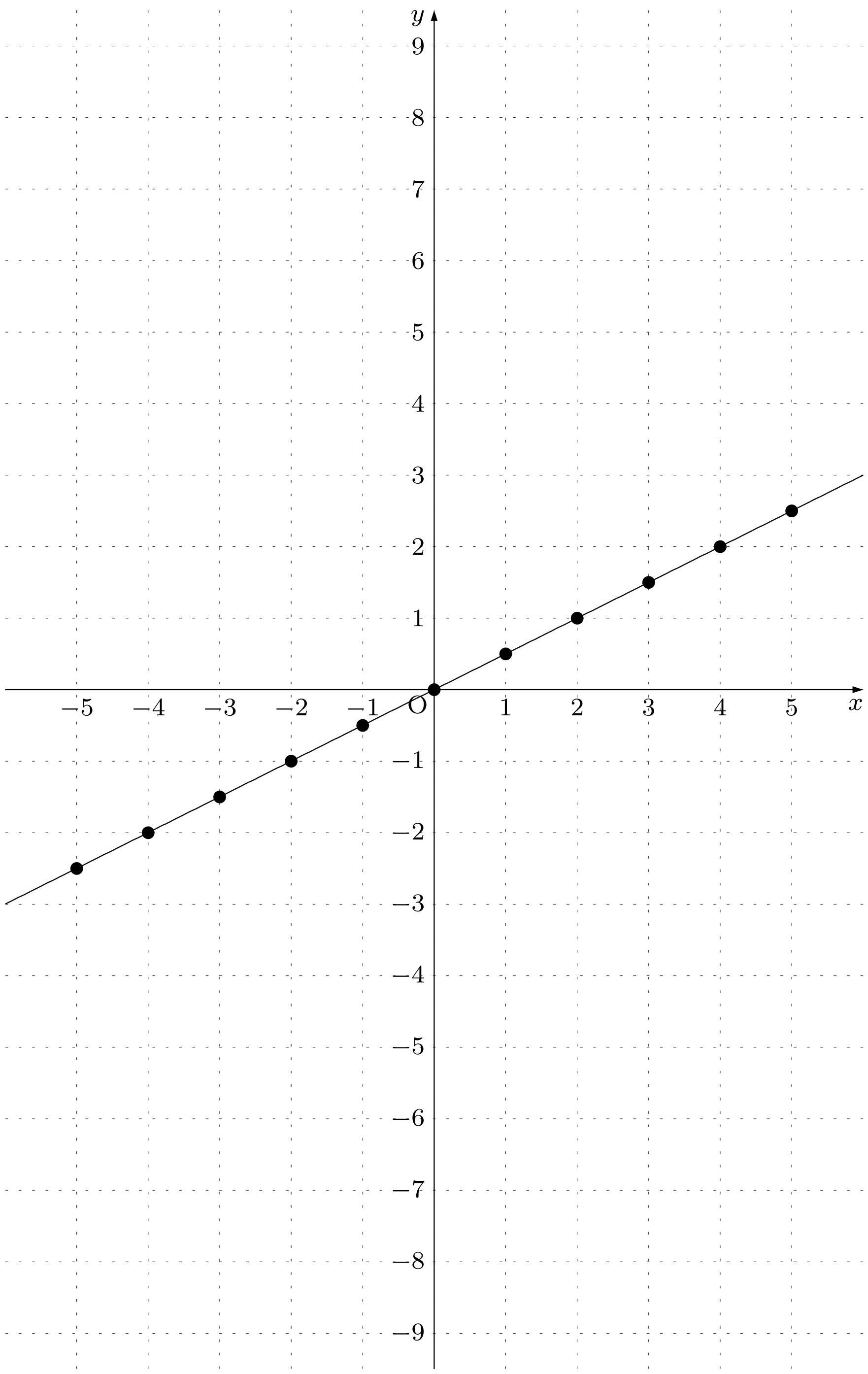
⑤ 関数 $y = -2x$ のグラフ



原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を通る直線になる。

全体的に右下がりである。

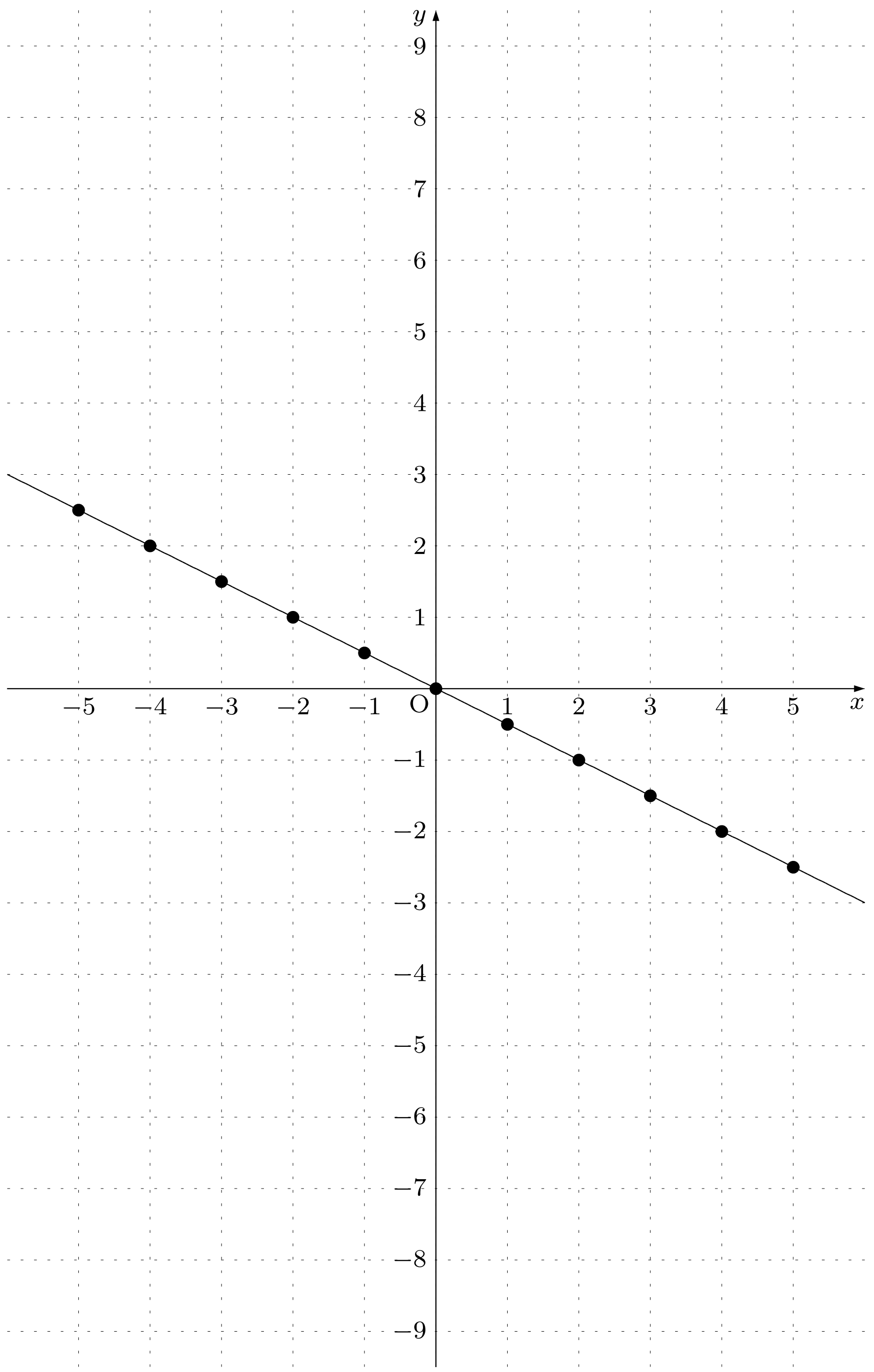
⑥ 関数 $y = \dfrac{1}{2}x$ のグラフ



原点 O$(0, 0)$ を通る直線になる。

全体的に右上がりである。

⑦ 関数 $y=-\frac{1}{2}x$ のグラフ



原点 O$(0,0)$ を通る直線になる。

全体的に右下がりである。

本文へ戻る

問 33. 前の問 32 に出てくる比例は以下の式で表されるものでしたね。

① $y = x$　② $y = 2x$　③ $y = 3x$　④ $y = -x$

⑤ $y = -2x$　⑥ $y = -3x$　⑦ $y = \dfrac{1}{2}x$　⑧ $y = -\dfrac{1}{2}x$

(1) 問 32 で作ったグラフを見るとわかりますが、x が増えると y が必ず増えるものは

①、②、③、⑦

ですね。（つまり、グラフが全体的に右上がりのものを選べば良いわけです。）

(2) 問 32 で作ったグラフを見るとわかりますが、x が増えると y が必ず増えるものは

④、⑤、⑥、⑧

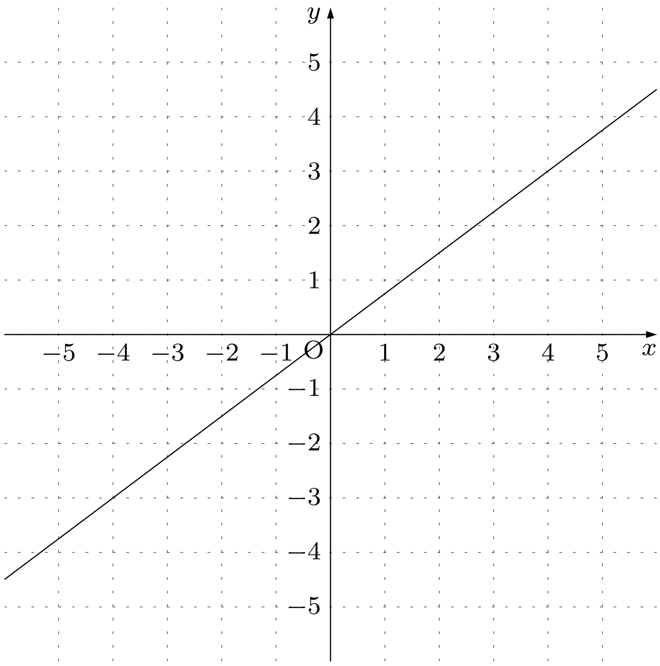
ですね。（つまり、グラフが全体的に右下がりのものを選べば良いわけです。）

(3) 比例には、「x が増えると y が必ず増えるもの」と「x が増えると y が必ず減るもの」があるわけです。グラフを見ないで、式を見るだけで、どっちなのか判断する方法はあります。ここまでしっかり比例のことを学習してきた人は気づいていると思います。実は・・・

比例の式は「$y = ax$」という形をしているわけですが、a がプラスの数だったら「x が増えると y が必ず増えるもの」になっていて、a がマイナスの数だったら「x が増えると y が必ず減るもの」になっているのです。

本文へ戻る

問 34. この関数のグラフはどう見ても直線ですね。また、どう見ても、原点（つまり x が 0 で y も 0 の所）を通っています。ですから、この関数は「比例」の仲間ですね。



「比例」は必ず、

$$y = ax$$

という形の数式です。ですから、あと a がいくつなのかわかれば式は完成です。しかし今の所、a がいくつなのかわかりません。そこで、グラフを見て、何か良い手ががりはないか探してみましょう。例えば、よく見ると、グラフは x が 4 で y が 3 の所を通っていることがわかります。（つまり、座標が $(4, 3)$ である点を通っています。）ということは、この関数では、x に 4 を入れると、y として 3 が出てくるということですね。ですからさっきの $y = ax$ という式で、x を 4 にして、y を 3 にしてみましょう。すると、

$$3 = a \times 4$$

となりますよね。この式を使えば、謎の数 a の正体がわかりますよね。まず、左と右を入れかえて、

$$a \times 4 = 3$$

となりますね。かけ算のマークをやめると、

$$4a = 3$$

ということですね。次は、左と右を 4 でわりましょう。そうすると、

$$a = \frac{3}{4}$$

ですね。

この関数は「比例」の仲間なので、この関数の式は $y = ax$ という形をしているということでしたね。そして今、a の正体がわかったのですね。ですから、この関数の式もわかります。もちろん

$$y = \frac{3}{4}x$$

ですね。

本文へ戻る

問 35. 「12 という数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の $\boxed{\text{仲間}}$ です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から $\boxed{3}$ が出てきます。また、入口から -6 を入れると、出口から $\boxed{-2}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{\dfrac{12}{x}}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{y = \frac{12}{x}}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から $\boxed{0}$ を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も 0 でわることはできないからです。ですから、x が $\boxed{0}$ のときの y は存在しないのです。 本文へ戻る

問 36. 「-2 という数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数は反比例の $\boxed{\text{仲間}}$ です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から $\boxed{-2}$ が出てきます。また、入口から -4 を入れると、出口から $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $\boxed{-\dfrac{2}{x}}$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$\boxed{y = -\frac{2}{x}}$$

となります。

ただ、注意しなければいけないことがあります。この関数では、入口から 0 を入れることはできません。それはどうしてかというと、どんな数も $\boxed{0}$ でわることはできないからです。ですから、x が $\boxed{0}$ のときの y は存在しないのです。

本文へ戻る

問 37. $y = \dfrac{a}{x}$

本文へ戻る

問 38.

① $y = \dfrac{1}{x}$　② $y = \dfrac{6}{x}$

③ $y = 6x$　④ $y = -\dfrac{1}{x}$

⑤ $y = 2x^2$　⑥ $y = -\dfrac{4}{x}$

⑦ $y = x + 1$　⑧ $y = \dfrac{1}{2}x$

の中から「反比例」を選ぶ問題でした。

反比例とは、$y = \dfrac{a}{x}$ という数式で表される「決まり」の関数ですから、①、②、④、⑥です。

本文へ戻る

問 39. 反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ では a のことを比例定数というのでした。ですから答えは以下のとおりになります。

(1) $y = \dfrac{1}{x}$ の比例定数は 1

(2) $y = -\dfrac{2}{x}$ は $y = \dfrac{-2}{x}$ と同じなので比例定数は -2

(3) $y = -\dfrac{1}{x}$ は $y = \dfrac{-1}{x}$ と同じなので比例定数は -1

(4) $y = \dfrac{6}{x}$ の比例定数は 6

本文へ戻る

問 40.

(1) この関数では、y は x に反比例するのですよね。ということは、この関数では、いつも y はある数を x でわったものになっているということですね。つまり、何か、

ある数 a があって、

$$y = \frac{a}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表されるということになります。a がいくつなのかは、今の所わかりません。しかし、問題には、まだ手がかりが書いてあります。$x = 4$ のとき、$y = 3$ になる ということですから、①式で x を 4 にすると、y として 3 が出てくることになります。つまり、

$$3 = \frac{a}{4}$$

となっているはずです。この式を使えば、謎の数 a を求めることができますね。まず、左と右を入れかえて、

$$\frac{a}{4} = 3$$

とします。

次に左と右に 4 をかけると、

$$a = 12$$

となります。これで、謎の数 a の正体がわかりました。これが比例定数ですよね。つまり、比例定数は 12 だったのです。

a の正体がわかったので、この関数の決まりを表す式も、もうわかりますね。つまり、①式の a は 12 であるということなので、答えはもちろん、もちろん、

$$y = \frac{12}{x}$$

ですよね。

(2) (1) でこの関数は

$$y = \frac{12}{x}$$

という数式で表されることがわかりましたね。ということは、$x = -2$ のとき、y はいくつになるのか知りたければ、この式の x に -2 を代入して y がいくつになる

のか計算すればよいわけです。というわけで、

$$y = \frac{12}{-2} = -6$$

となります。

(3) (1) でこの関数は

$$y = \frac{12}{x}$$

という数式で表されることがわかりましたね。ということは、$y = -4$ のとき、x はいくつだったのか知りたければ、この式の y に -4 を代入して x がいくつだったのか計算すればよいわけです。というわけで、とりあえず

$$-4 = \frac{12}{x}$$

となります。この式をもとにして、謎の数 x を発見すれば良いわけです。

まず、左と右を入れ替えて

$$\frac{12}{x} = -4$$

とします。そして左と右に x をかけると

$$\frac{12}{x} \times x = -4 \times x$$

となりますが、この式の見かけをマシにすると

$$12 = -4x$$

となります。

次に、この式の左と右を入れかえると

$$-4x = 12$$

となります。

そしてこの式の左と右を 4 でわると

$$x = -3$$

となります。これがこの問題の答えですね。

(4) 変域の調べ方はこのテキストの「1.2 関数の変域」で詳しく学びました。忘れてしまった人は 11 ページを開いて復習してください。

x の変域が $2 \leqq x \leqq 12$ ですから x の値をいろいろこの範囲で変えた時に「出口から出てくる y の値」はどうなるのか調べます。

この問題の関数は

$$y = \frac{12}{x}$$

という数式で表されるということがわかっているのですから、この式をつかって関数の表を作ります。ここでは x の値を 1 きざみで変えて調べてみます。すると次のようになるはずです。

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	6	4	3	2.4	2	$1.71\cdots$	1.5	$1.33\cdots$	1.2	$1.09\cdots$	1

この表の y の段を見ると、y は 1 以上 62 以下の数になるということが悟れるでしょう。つまりこの問題の答えは

$$y \text{ の変域は } 1 \leqq y \leqq 6$$

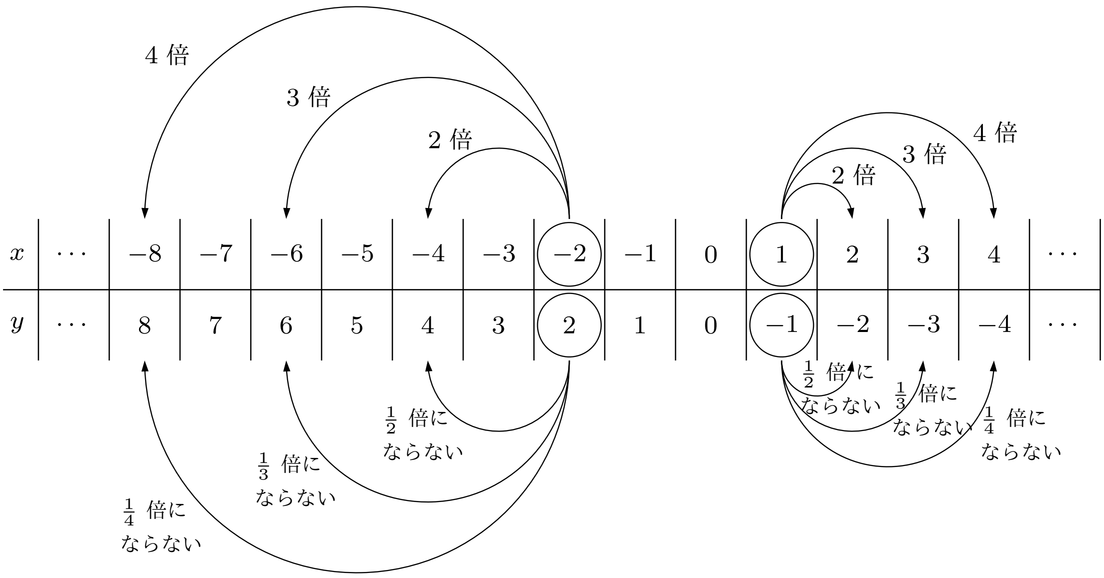
ということです。

本文へ戻る

問 41.

(1) $y=-x$ の表は次のようになります。

$y=-x$ の表



表を見るとわかるように、「関数 $y=-x$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y=-x$」という式は「$y=\dfrac{a}{x}$」という形をしていないので反比例の仲間ではありません。

(2) $y=-\dfrac{1}{x}$ の表は次のようになります。

$y=-\dfrac{1}{x}$ の表

4 倍　3 倍　2 倍　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1		-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$

$\frac{1}{2}$ 倍　$\frac{1}{3}$ 倍　$\frac{1}{4}$ 倍　$\frac{1}{2}$ 倍　$\frac{1}{3}$ 倍　$\frac{1}{4}$ 倍

表から想像できるように、「関数 $y=-\dfrac{1}{x}$」では、スタートの数をいくつにしても、

> 入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こります。

「関数 $y=-\dfrac{1}{x}$」という式は「関数 $y=\dfrac{-1}{x}$」と同じです。というわけで「関数 $y=-\dfrac{1}{x}$」は「$y=\dfrac{a}{x}$」という形をしていることになるので反比例の仲間です。

(3) $y = 2x + 1$ の表は次のようになります。

$y = 2x + 1$ の表

4 倍　3 倍　2 倍　　　　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-15	-13	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	$\cdots$

$\frac{1}{2}$ 倍にならない　$\frac{1}{3}$ 倍にならない　$\frac{1}{4}$ 倍にならない　　$\frac{1}{2}$ 倍にならない　$\frac{1}{3}$ 倍にならない　$\frac{1}{4}$ 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y = 2x + 1$」では、スタートの数をいくつにしても、

> 入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y = 2x + 1$」という式は「$y = \dfrac{a}{x}$」という形をしていないので反比例の仲間ではありません。

(4) $y = \dfrac{1}{x}$ の表は次のようになります。

$y = \dfrac{1}{x}$ の表

4 倍　3 倍　2 倍　　　　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	╳	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$

$\frac{1}{2}$ 倍　$\frac{1}{3}$ 倍　$\frac{1}{4}$ 倍　　　　$\frac{1}{2}$ 倍　$\frac{1}{3}$ 倍　$\frac{1}{4}$ 倍

表から想像できるように、「関数 $y = \dfrac{1}{x}$」では、スタートの数をいくつにしても、

> 入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということが起こります。

「関数 $y = \dfrac{1}{x}$」は「$y = \dfrac{a}{x}$」という形をしているので反比例の仲間です。

(5) $y = \dfrac{x}{2}$ の表は次のようになります。

$y = \dfrac{x}{2}$ の表

4 倍　3 倍　2 倍　　2 倍　3 倍　4 倍

x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-4	$-\dfrac{7}{2}$	-3	$-\dfrac{5}{2}$	-2	$-\dfrac{3}{2}$	-1	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	1	$\dfrac{3}{2}$	2	$\cdots$

$\frac{1}{2}$ 倍にならない　$\frac{1}{3}$ 倍にならない　$\frac{1}{4}$ 倍にならない　　$\frac{1}{2}$ 倍にならない　$\frac{1}{3}$ 倍にならない　$\frac{1}{4}$ 倍にならない

表を見るとわかるように、「関数 $y = \dfrac{x}{2}$」では、スタートの数をいくつにしても、

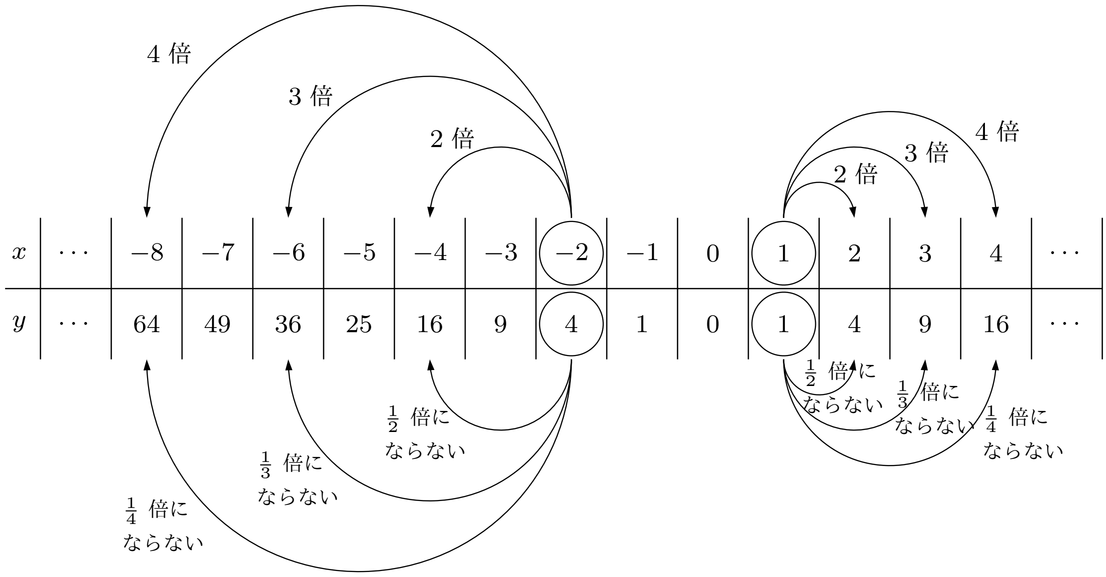
> 入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

ということは起こりません。

「関数 $y = \dfrac{x}{2}$」という式は「$y = \dfrac{a}{x}$」という形をしていないので反比例の仲間ではありません。

(6) $y = x^2$ の表は次のようになります。

$y = x^2$ の表



x	$\cdots$	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

表を見るとわかるように、「関数 $y = x^2$」では、スタートの数をいくつにしても、

入り口から入れる x の値を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていくと、出口から出てくる y の値は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ となっていく

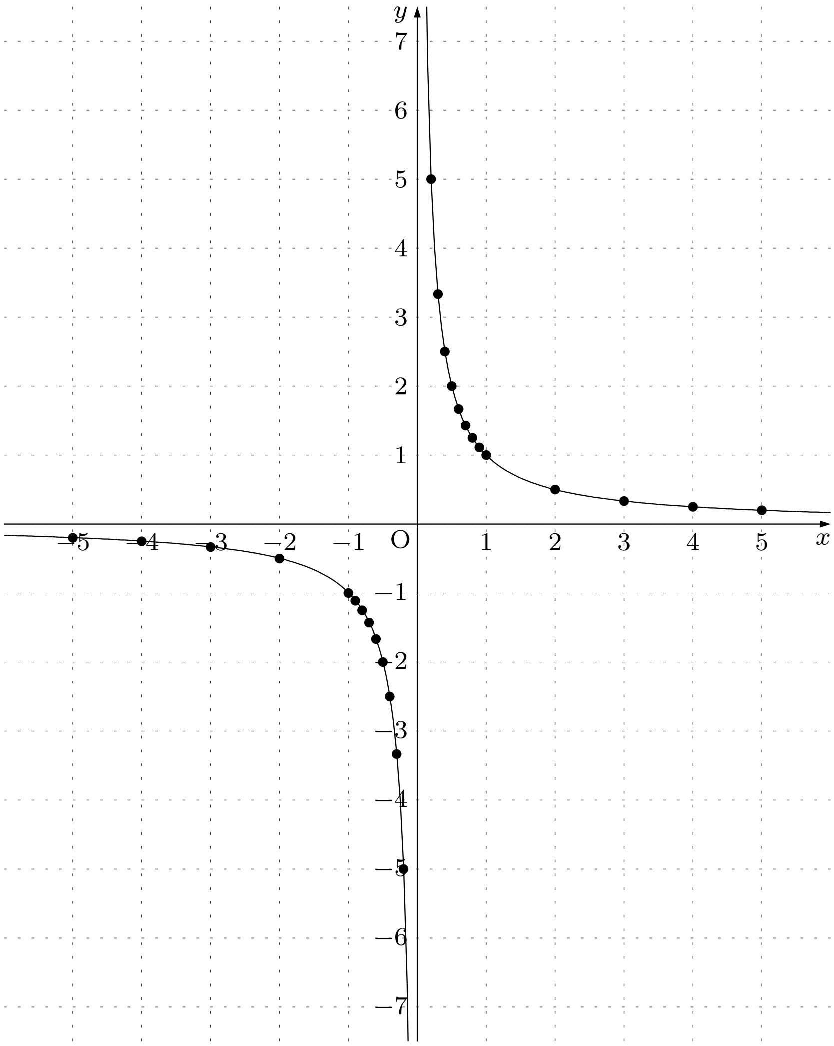
ということは起こりません。

「関数 $y = x^2$」という式は「$y = \dfrac{a}{x}$」という形をしていないので反比例の仲間ではありません。

本文へ戻る

問 42.

① 関数 $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ

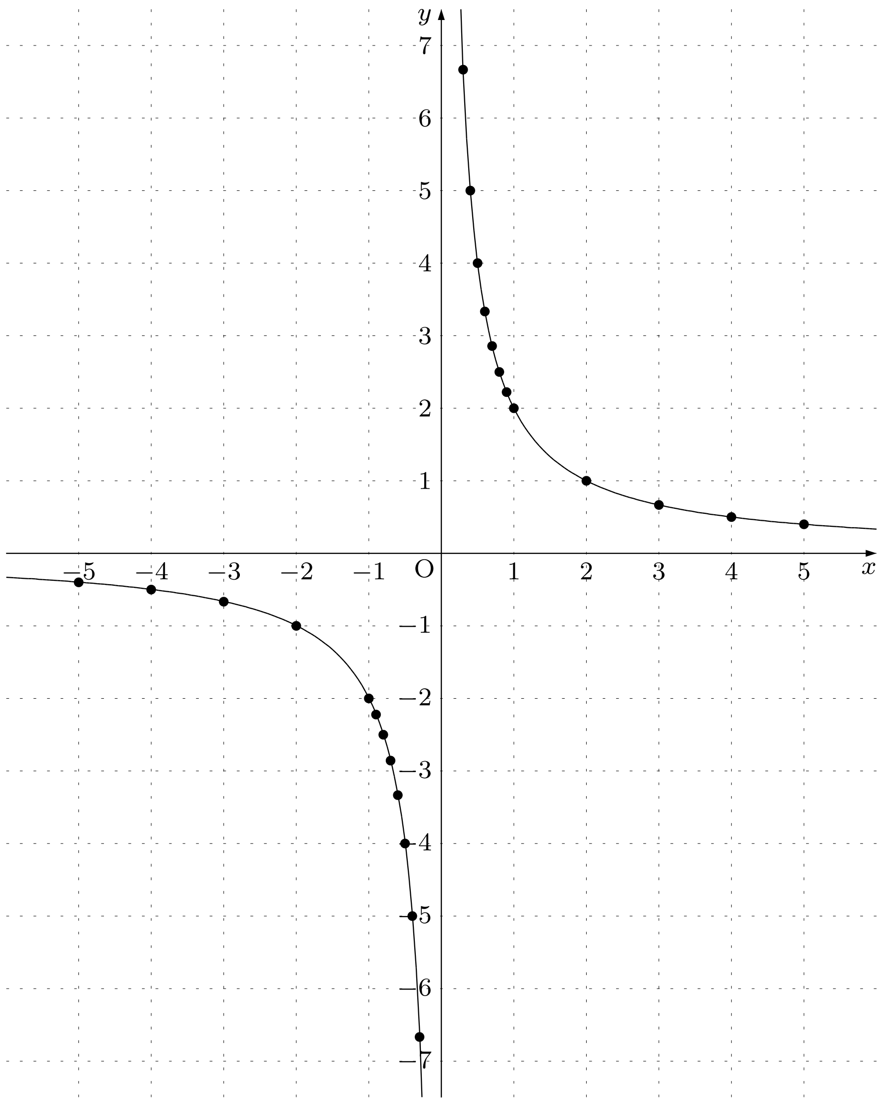


グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりである。

② 関数 $y = \dfrac{2}{x}$ のグラフ



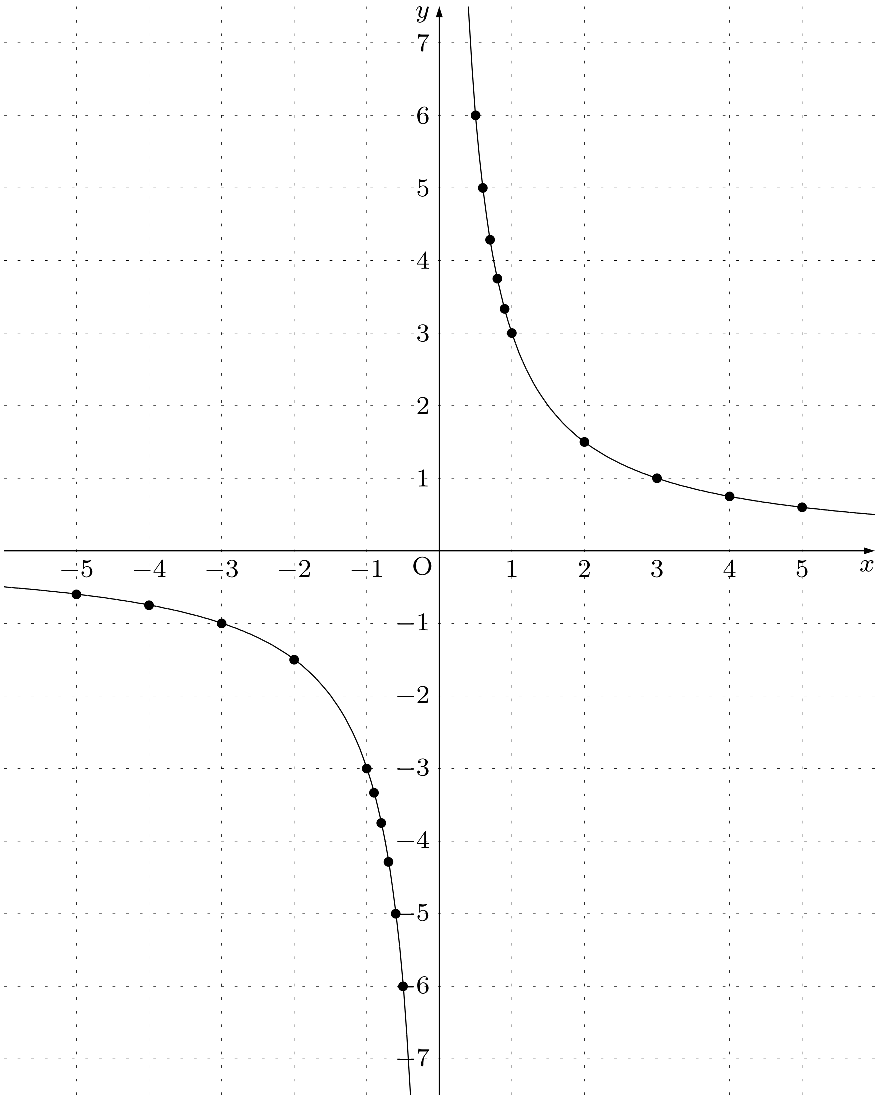
グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。

つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりである。

③ 関数 $y = \dfrac{3}{x}$ のグラフ

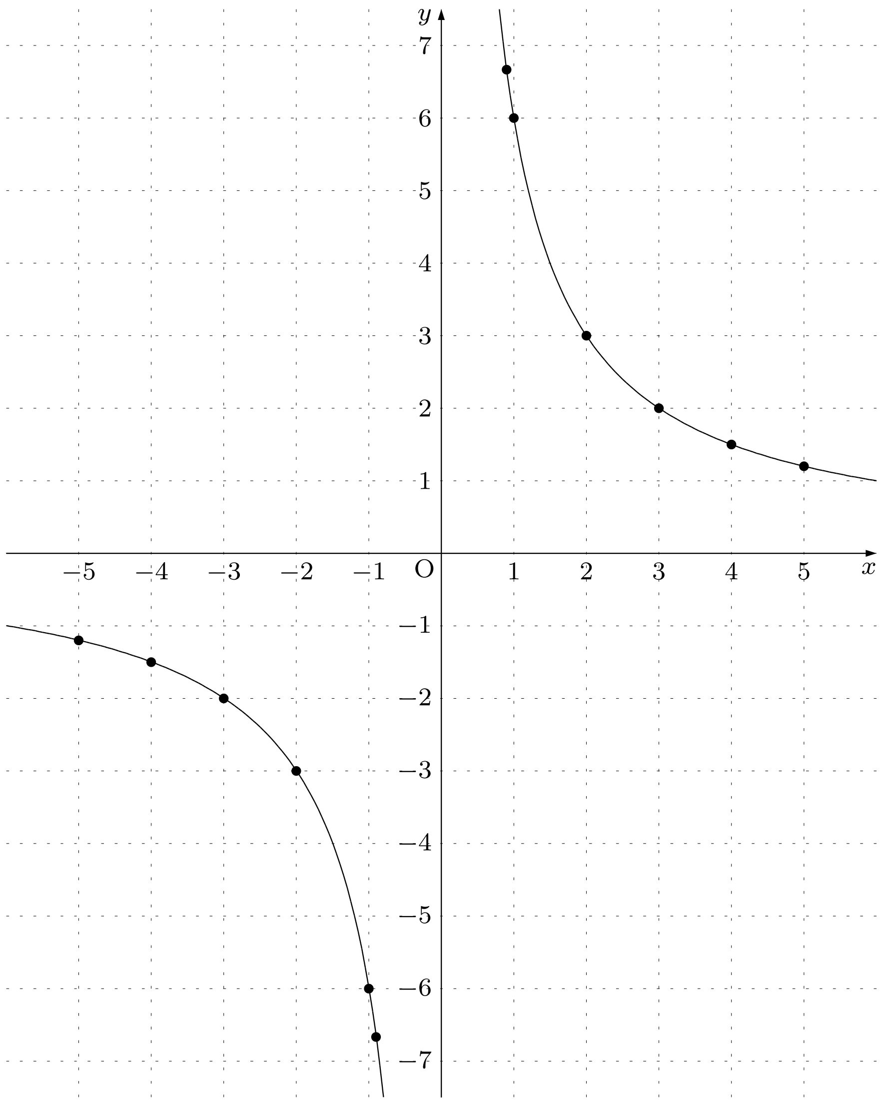


グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりである。

④ 関数 $y = \dfrac{6}{x}$ のグラフ



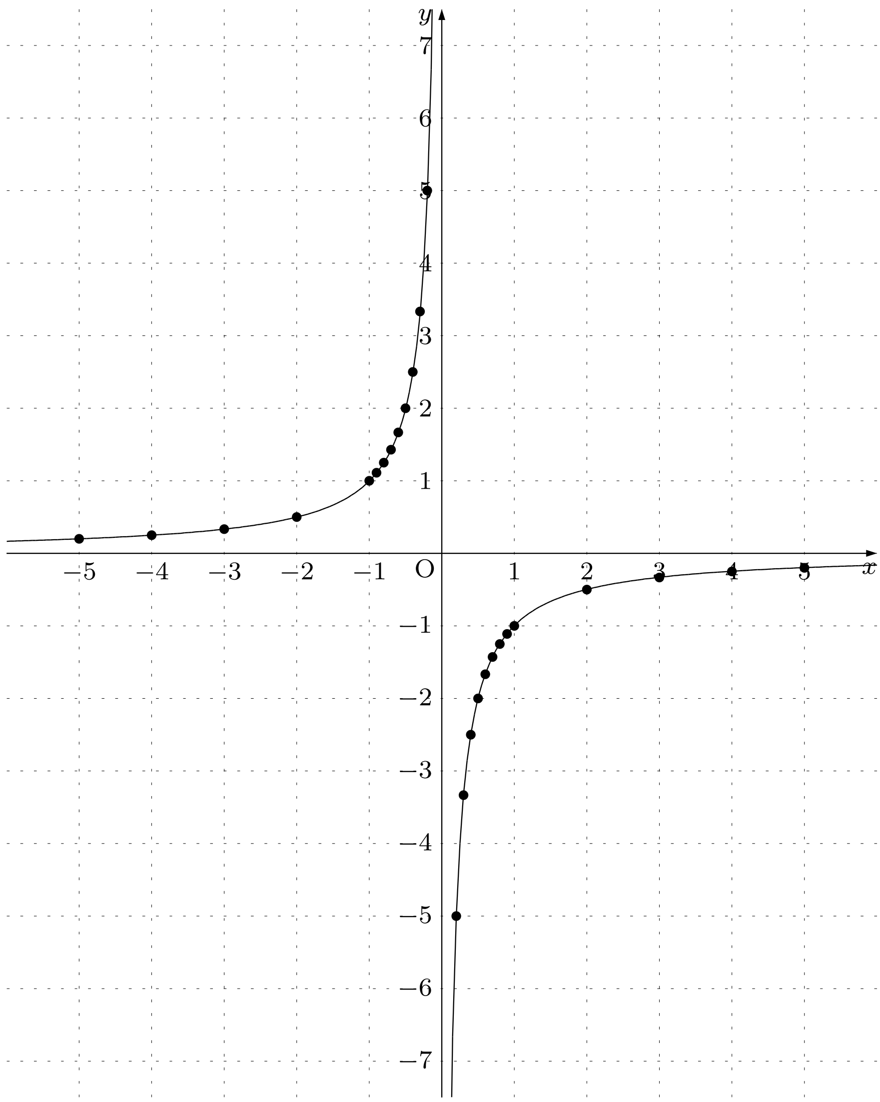
グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。

つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりである。

⑤ 関数 $y = -\dfrac{1}{x}$ のグラフ

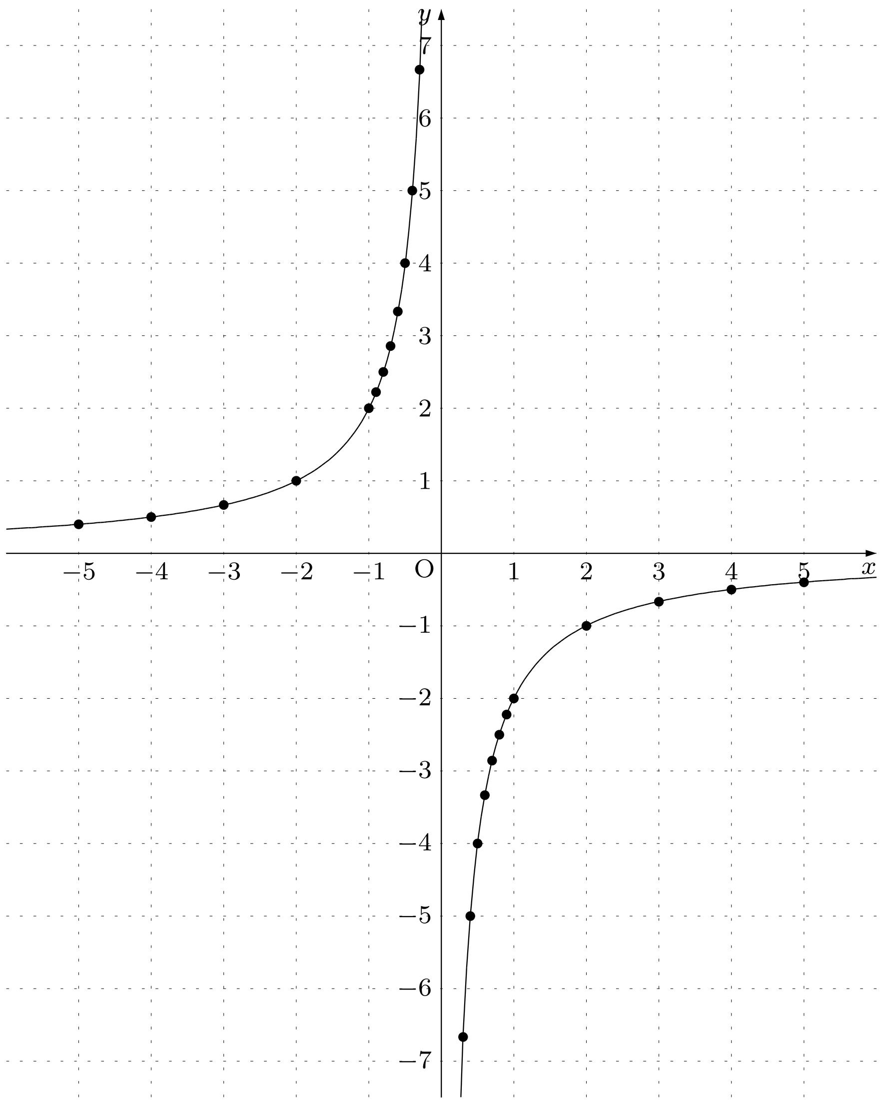


グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y がプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y がマイナスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりである。

⑥ 関数 $y = -\dfrac{2}{x}$ のグラフ

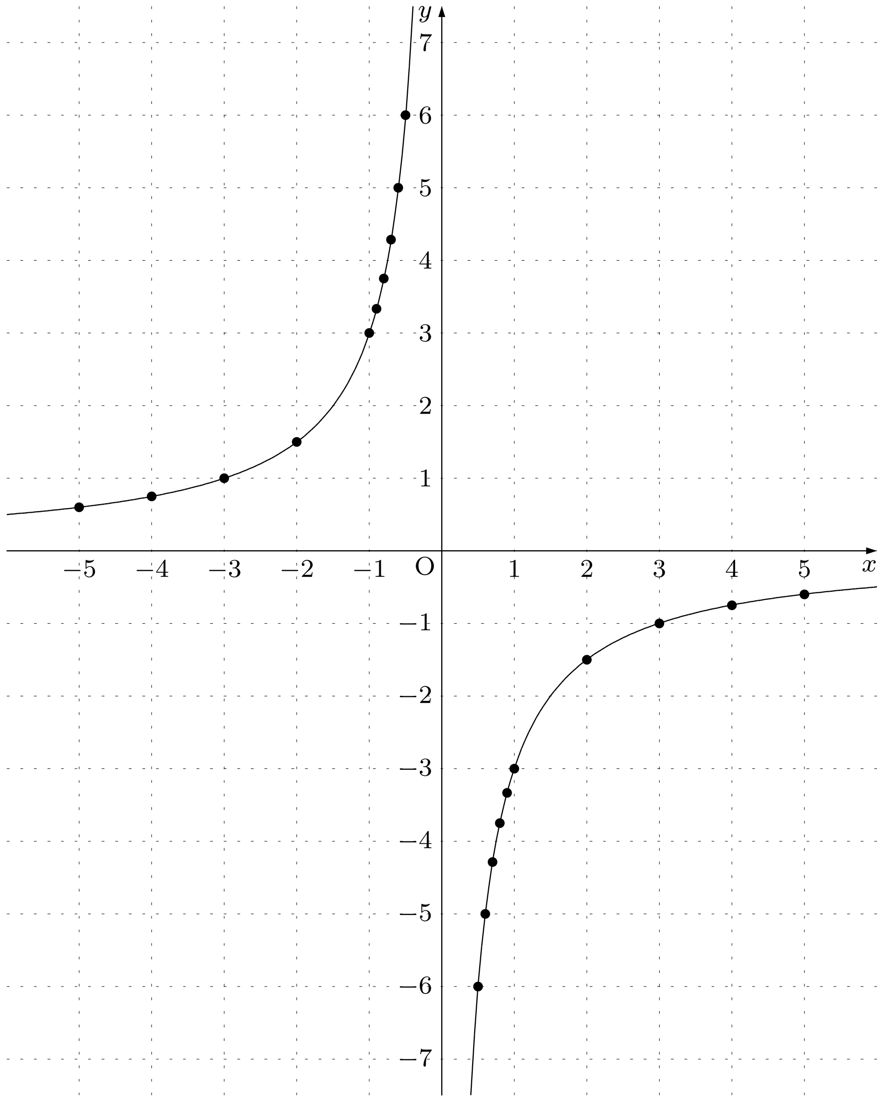


グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y がプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y がマイナスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりである。

⑦ 関数 $y = -\dfrac{3}{x}$ のグラフ

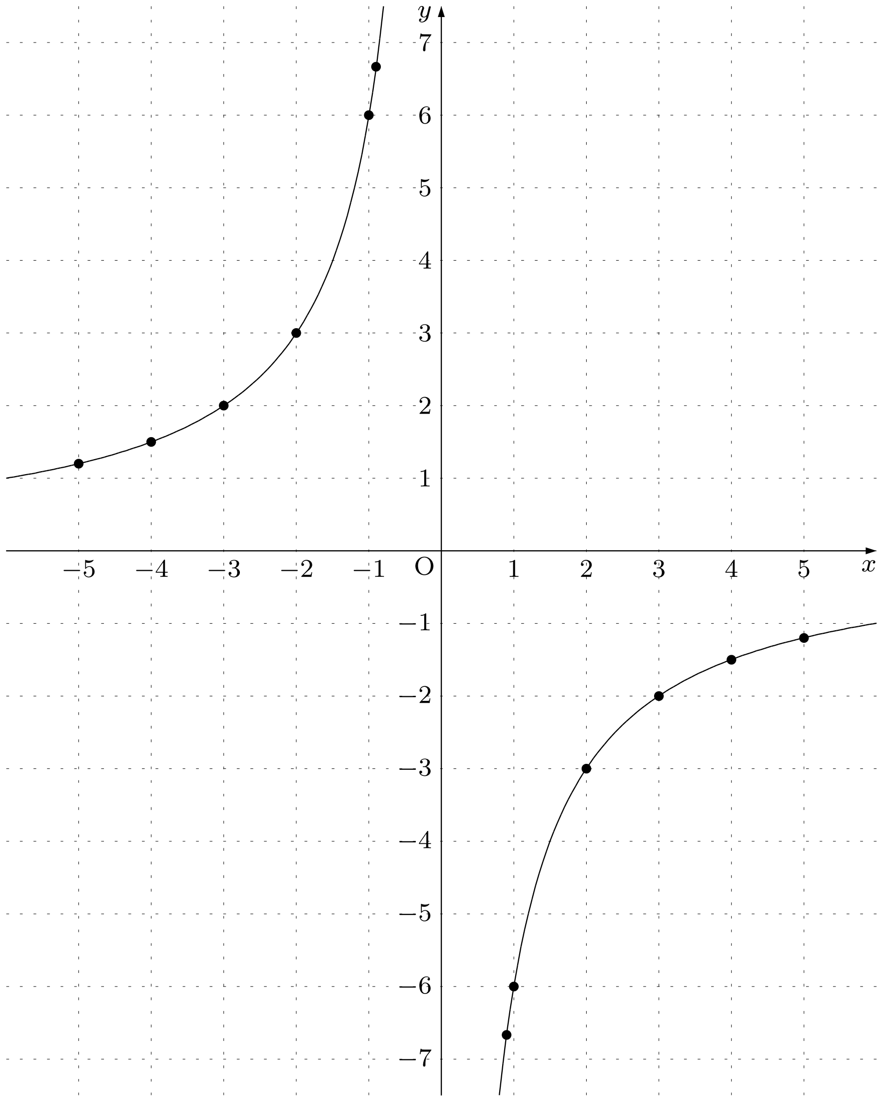


グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y がプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y がマイナスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりである。

⑧ 関数 $y = -\dfrac{6}{x}$ のグラフ



グラフは 2 本の曲線になる。1 本は x がマイナスで y がプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y がマイナスの世界に現れる。

グラフの上を（好きなほうへ）たどっていくと、どんどん x 軸や y 軸に接近していく。つまりグラフと軸のすき間は小さくなっていく。

グラフは、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりである。

本文へ戻る

問 43. 前の問 42 に出てくる反比例は以下の式で表されるものでしたね。

① $y=\dfrac{1}{x}$　② $y=\dfrac{2}{x}$　③ $y=\dfrac{3}{x}$　④ $y=\dfrac{6}{x}$

⑤ $y=-\dfrac{1}{x}$　⑥ $y=-\dfrac{2}{x}$　⑦ $y=-\dfrac{3}{x}$　⑧ $y=-\dfrac{6}{x}$

念のための注意です。⑤、⑥、⑦、⑧ はそれぞれ

⑤ $y=\dfrac{-1}{x}$　⑥ $y=\dfrac{-2}{x}$　⑦ $y=\dfrac{-3}{x}$　⑧ $y=\dfrac{-6}{x}$

という式と同じであることに注意しましょう。

(1) 反比例では「比例定数」というのは「$y=\dfrac{a}{x}$」という式の a のことですから、比例定数がプラスのものは

①、②、③、④

です。

(2) 反比例では「比例定数」というのは「$y=\dfrac{a}{x}$」という式の a のことですから、比例定数がプラスのものは

⑤、⑥、⑦、⑧

です。

(3) 反比例のグラフは 2 本の曲線になります。

前の問 42 で作ったグラフを見るとわかりますが、

- 比例定数がプラスの場合、1 本は x がマイナスで y もマイナスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y もプラスの世界に現れます。そして、x がマイナスの値に対応している 1 本は右下がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右下がりです。
- 比例定数がマイナスの場合、1 本は x がマイナスで y がプラスの世界に現れ、もう 1 本は x がプラスで y がマイナスの世界に現れます。そして、x がマイナスの値に対応している 1 本は右上がりで、x がプラスの値に対応している 1 本も右上がりです。

本文へ戻る

問 44. $y = \dfrac{3}{x}$ という反比例についての問題でしたね。

(1) ● x の値が 10 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{10} = 0.3$$

● x の値が 100 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{100} = 0.03$$

● x の値が 1000 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{1000} = 0.003$$

となります。

さらに x の値を大きくしていくと、y の値はプラスのままどんどん 0 に近づいていきます。

(2) x の値が 10、100、1000、10000、100000 $\cdots$ と大きくなればなるほど、$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフは x 軸の上側から x 軸へ近づいていき、x 軸との幅が狭くなっていきます。

(3) ● x の値が 0.1 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{0.1} = 30$$

● x の値が 0.01 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{0.01} = 300$$

● x の値が 0.001 のときの y の値を求めると

$$y = \frac{3}{0.001} = 3000$$

となります。

さらに x の値をプラスのままどんどん 0 へ近づけていくと、y の値はどんどん大き

な数になっていきます。

(4) x の値が 0.1、0, 01、0.001、0.0001、0.00001 $\cdots$ のように、プラスのまま 0 に近づけば近づくほど、$y = \dfrac{3}{x}$ のグラフは y 軸の右側から y 軸へ近づいていき、y 軸との幅が狭くなっていきます。

本文へ戻る

問 45. 「反比例」は必ず、

$$y = \frac{a}{x}$$

という形の数式です。ですから、あと a がいくつなのかわかれば式は完成です。しかし今の所、a がいくつなのかわかりません。そこでグラフを見て、何か良い手ががりはないか考えて見ましょう。よく見ると、グラフは x が 2 で y が 1 の所を通っています。(つまり、座標が $(2, 1)$ である点を通っています。) ということは、この関数では、x に 2 を入れると、y として 1 が出てくるということですね。ですから、さっきの $y = \dfrac{a}{x}$ という式で、x を 2 にして y を 1 にしてみましょう。すると、

$$1 = \frac{a}{2}$$

となりますよね。この式を使えば、謎の数 a の正体がわかるはずです。

まず、左と右を入れかえて、

$$\frac{a}{2} = 1$$

となりますね。

次は、左と右に 2 をかけましょう。そうすると、

$$a = 2$$

ですね。

この問題の関数は「反比例」の仲間なので、この関数の式は $y = \dfrac{a}{x}$ という形をしているということでしたね。そして今、a の正体がわかったのですね。ですから、この関数の

式もわかります。もちろん、

$$y = \frac{2}{x}$$

ですね。 本文へ戻る

問 46. 『500 枚入りのコピー用紙を買ってきて袋を開けて何枚か使ったのですが、何枚使ったのかもう覚えていません。結構使ったかもしれないのですが、まだまだたくさん残っています。何枚残っているのかできるだけ正確に知りたいのですが、真面目に 1 枚 1 枚数えるのは大変なので嫌です。なにか良い方法はありますか？』という問題でした。

人によって色々な考えがあると思いますが、例えば次のような 2 つの方法があります。

はかりで重さをはかる方法　とりあえず、コピー用紙をきちんと数えて何枚か取り出し、重さをはかります。そうですねぇ、30 枚とか 40 枚とか 50 枚ぐらいが良いでしょうか。あまり少ないと正確な測定や計算ができなくなりますから。例えば、50 枚取り出して重さをはかった所、重さが 200 g だったとしましょう。

次にコピー用紙 1 枚の重さを計算します。さっきの測定値を使うと

$$\text{コピー用紙 1 枚の重さ} = 200 \div 50 = 4\,\mathrm{g}$$

ということになります。

次にさっき取り出したコピー用紙を戻して残っているコピー用紙全部の重さをはかります。例えば残っているコピー用紙全部の重さは 1688 g だったとします。

ここまで来ると準備完了です。

コピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと重さも 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくはずです。逆に考えれば、コピー用紙の枚数を知りたければ、「重さ」を「コピー用紙 1 枚の重さ」で割れば良いことがわかります。ですから、さっきの測定値や計算値を使うと、

$$\text{残っているコピー用紙の枚数} = 1688 \div 4 = 422\,\text{枚}$$

ということがわかります。

定規で厚みをはかる方法　とりあえず、コピー用紙をきちんと数えて何枚か取り出し、厚みをはかります。そうですねぇ、30 枚とか 40 枚とか 50 枚ぐらいが良いでしょうか。あまり少ないと正確な測定や計算ができなくなりますから。例えば、50 枚取り出して厚みをはかった所、重さが 45 mm だったとしましょう。

次にコピー用紙 1 枚の厚みを計算します。さっきの測定値を使うと

$$\text{コピー用紙 1 枚の厚み} = 45 \div 50 = 0.9\,\mathrm{mm}$$

ということになります。

次にさっき取り出したコピー用紙を戻して残っているコピー用紙全部の厚みをはかります。例えば残っているコピー用紙全部の厚みは 342 mm だったとします。

ここまで来ると準備完了です。

コピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくと厚み 2 倍、3 倍、4 倍・・・となっていくはずです。逆に考えれば、コピー用紙の枚数を知りたければ、「厚み」を「コピー用紙 1 枚の厚み」で割れば良いことがわかります。ですから、さっきの測定値や計算値を使うと、

$$\text{残っているコピー用紙の枚数} = 342 \div 0.9 = 380\,\text{枚}$$

ということがわかります。

注意：どちらの方法にしても、コピー用紙 1 枚の重さとかコピー用紙 1 枚の厚みをできるだけ正確に知ることが大切です。そのためには、最初にコピー用紙をきちんと数えて何枚か取り出すときに、ある程度多くの枚数をとり出す必要があります。あまりとり出す枚数が少ないと、不正確な値しか求められませんよね。だって、はかりや定規についている目盛りって限界がありますから。

本文へ戻る

問 47. 『袋の中にたくさんのコピー用紙が入っています。袋の中からコピー用紙を全て出してはかりで重さをはかった所、コピー用紙全部の重さは 1672 g でした。また、このコピー用紙を 40 枚はかりにのせて重さをはかった所 152 g でした。以下の問に答えなさい。』ということでした。

(1) 『コピー用紙 1 枚の重さを求めなさい。』という問題でしたね。

コピー用紙を 40 枚はかりにのせて重さをはかった所 152 g だったのですから、

$$\text{コピー用紙 1 枚の重さ} = 152 \div 40 = 3.8\,\mathrm{g}$$

ということですね。

(2) 『コピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますか？』という問題でしたね。

そうなりますよね。

(3) 『コピー用紙の枚数とコピー用紙の重さは比例していると言えますか？』という問題でしたね。

コピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのですから、コピー用紙の枚数とコピー用紙の重さは比例していると言えますね。

(4) 最初袋の中に入っていた全部のコピー用紙の重さは 1672 g ですね。そしてコピー用紙 1 枚の重さは 3.8 g でしたね。ということは

$$\text{最初袋の中に入っていた全部のコピー用紙の枚数} = 1672 \div 3.8 = 440\,\text{枚}$$

ということになりますね。

(5) 『コピー用紙の枚数が x 枚のときのコピー用紙の重さを y g とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。』という問題でしたね。

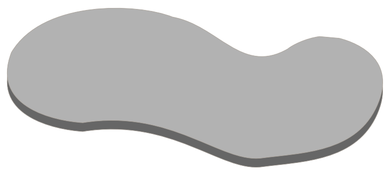
コピー用紙 1 枚の重さは 3.8 g でしたね。そしてコピー用紙の枚数が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのですね。だとしたら

$$y = 3.8x$$

という関係が成り立っていることになりますね。

本文へ戻る

問 48. 『右の図のような形をした鉄板があります。この鉄板の重さをはかりではかった所、重さは 1024 g でした。同じ種類で同じ厚さの鉄板を使い、1 辺 5 cm の正方形の鉄板を作って重さをはかると 40 g でした。以下の問に答えなさい。』ということでした。



(1) 『同じ種類で同じ厚さの鉄板で面積が 1 cm^2 の鉄板を作ると重さはどれだけになりますか。』という問題でしたね。

1 辺 5 cm の正方形の鉄板を作って重さをはかると 40 g だったのですよね。1 辺 5 cm の正方形の面積は 25 cm^2 ですから

$$\text{面積が } 1\,\mathrm{cm} \text{ の鉄板の重さ} = 40 \div 25 = 1.6\,\mathrm{g}$$

となります。

(2) 『鉄板の面積がが 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていきますか？』という問題でしたね。

そうなりますよね。

(3) 『鉄板の面積と鉄板の重さは比例しているといえますか。』という問題でしたね。

いえますね。

(4) 『この図の鉄板の面積を求めなさい。』という問題でしたね。

この図の鉄板の重さは 1024 g ですね。そして面積が 1 cm の鉄板の重さは 1.6 g でしたね。ということは

$$\text{この図の鉄板の面積} = 1024 \div 1.6 = 640\,\mathrm{cm}^2$$

ということになりますね。

(5) 『鉄板の面積が $x\,\mathrm{cm}^2$ のときの鉄板の重さを $y\,\mathrm{g}$ とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。』という問題でしたね。

面積が 1 cm の鉄板の重さは 1.6 g でしたね。そして鉄板の面積が 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくと、重さは 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ となっていくのですね。だとしたら

$$y = 1.6x$$

という関係が成り立っていることになりますね。

本文へ戻る

問 49. 『夏休みに数学の問題を解く宿題が出ました。問題数が全部でいくつなのか知らないのですが、友達によると、毎日 4 問づつ解くと 36 日で終わるそうです。以下の問に答えなさい。』ということでした。

(1) 『毎日解く問題数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、終わるまでの日数は $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍、$\frac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？』という問題でしたね。

言えますよね。

(2) 『毎日解く問題数を 4 問から 8 問に変えると、終わるまでの日数は何日になりますか？』という問題でしたね。

たしか、毎日 4 問づつ解くと 36 日で終わるのでした。

毎日解く問題数を 4 問から 8 問に変えるということは、毎日解く問題数を 2 倍に変

えるということです。そうすると、終わるまでの日数は $\frac{1}{2}$ になります。ですから

$$終わるまでの日数 = 36 \times \frac{1}{2} = 18\,日$$

ですね。

(3) 『毎日解く問題数を 4 問から 24 問に変えると、終わるまでの日数は何日になりますか？』という問題でしたね。

たしか、毎日 4 問づつ解くと 36 日で終わるのでした。

毎日解く問題数を 4 問から 24 問に変えるということは、毎日解く問題数を 6 倍に変えるということです。そうすると、終わるまでの日数は $\frac{1}{6}$ になります。ですから

$$終わるまでの日数 = 36 \times \frac{1}{6} = 6\,日$$

ですね。

(4) 『終わるまでの日数を 36 日ではなく 12 日に縮めるには、毎日何問解けば良いですか。』という問題でしたね。

終わるまでの日数を $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}\cdots$ としたければ、毎日解く問題数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていけば良いのですよね。

たしか、毎日 4 問づつ解くと 36 日で終わるのでした。

終わるまでの日数を 36 日ではなく 12 ヶ月に縮めるということは、終わるまでの日数を $\frac{1}{3}$ にするということです。ですから、毎日解く問題数は 4 問の 3 倍にしなくてはいけません。つまり毎日 12 問解く必要があります。

本文へ戻る

問 50. 『ある中学校では、これまでこの中学校を卒業した人全員を対象とした同窓会を開くことになりました。そして、同窓会の日時を知らせるため、これまでこの中学校を卒業した人全員に同窓会のお知らせのはがきを出すことになりました。これまでこの中学校

を卒業した人が全部で何人いるのか知らないのですが、5 人ではがきを書くと、1 人あたり 240 枚はがきを書かなければならないそうです。以下の問に答えなさい。』ということでした。

(1) 『はがきを書く人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、1 人が書かなければならないはがきの枚数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？』という問題でしたね。

そう言えますよね。

(2) 『はがきを書く人数を 5 人から 15 人に変えると、1 人が書かなければならないはがきの枚数は何枚になりますか？』という問題でしたね。

はがきを書く人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、1 人が書かなければならないはがきの枚数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わるのでした。

5 人ではがきを書くと、1 人あたり 240 枚はがきを書かなければならないのでした。

はがきを書く人数を 5 人から 15 人に変えるということは、はがきを書く人数を 3 倍にするということです。ですから、1 人が書かなければならないはがきの数は $\dfrac{1}{3}$ になります。つまり、

$$240 \times \frac{1}{3} = 80\,\text{枚}$$

ということになります。

(3) 『1 人が書かなければならないはがきの枚数を 240 枚ではなく 40 枚にするには、何人ではがきを書けば良いですか。』という問題でしたね。

1 人が書かなければならないはがきの枚数を $\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{1}{4}\cdots$ としたければ、はがきを書く人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ としていけば良いのですよね。

5 人ではがきを書くと、1 人あたり 240 枚はがきを書かなければならないのでした。

1 人が書かなければならないはがきの枚数を 240 枚ではなく 40 枚に変えるということは、1 人が書かなければならないはがきの枚数を $\dfrac{1}{6}$ にするということです。

ですから、はがきを書く人数を 6 倍にしなくてはいけません。つまり

$$5 \times 6 = 30\,人$$

にすれば良いのです。

(4) 『x 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を y 枚とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。』という問題でしたね。

まず、全部で何人卒業生がいるのか考えてみましょう。 5 人ではがきを書くと、1 人あたり 240 枚はがきを書かなければならないのですから、

$$全部の卒業生の人数 = 5 \times 240 = 1200\,人$$

ということになりますね。

そうすると、x 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を y を求めるには割り算で $1200 \div x$ をすればよいのですから

$$y = \frac{1200}{x}$$

とあらわすことができますね。

(5) 『(4) で答えた式を使って、24 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を求めなさい。』という問題でしたね。

(4) で、x 人ではがきを書くとき、1 人が書かなければならないはがきの枚数を y を求めるには $y = \dfrac{1200}{x}$ という式を使えば良いことがわかりました。ですから 24 人ではがきを書くとき、この袋の中にあるキャンディーを 15 人でわけたとき、

$$1\,人が書かなければならないはがきの枚数 = \frac{1200}{24} = 50\,枚$$

と計算できますね。

本文へ戻る

問 51. 『4 人でやると 12 日間かかる仕事があります。以下の問に答えなさい。』ということでした。

(1) 『仕事をする人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、仕事にかかる日数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えますか？ただし 1 人がする仕事の量はみんな等しいとします。』という問題でしたね。

そう言えますよね。

(2) 『この仕事を 3 日で終わらせるには何人でやれば良いでしょうか。ただし 1 人がする仕事の量はみんな等しいとします。』という問題でしたね。

仕事をする人数を 2 倍、3 倍、4 倍 $\cdots$ に変えてみると、仕事にかかる日数は $\dfrac{1}{2}$ 倍、$\dfrac{1}{3}$ 倍、$\dfrac{1}{4}$ 倍 $\cdots$ に変わると言えるのでした。

4 人でやると 12 日間かかるのでした。

この仕事を 12 日ではなく 3 日で終わらせるということは、仕事にかかる日数を $\dfrac{1}{4}$ にするということです。ですから、仕事をする人数を 4 倍にしなくてはなりません。つまり

$$4 \times 4 = 16\text{人}$$

でやれば良いということになります。

(3) 『x 人で仕事をするときに仕事にかかる日数を y 日とします。y と x の関係を考えて、y を x の式で表しなさい。』という問題でしたね。

4 人でやると 12 日間かかるのでした。また、4×12 は 48 です。というわけで、x 人で仕事をするときに仕事にかかる日数を y 日とすると

$$y = \frac{48}{x}$$

という関係になります。

(4) 『(3) で答えた式を使って、6 人で仕事をすると、何日で仕事が終わるか求めなさ

い。』という問題でしたね。

(3) で x 人で仕事をするときに仕事にかかる日数を求めるには $y = \dfrac{48}{x}$ という式を使えば良いことがわかりました。ですから 6 人で仕事をすると

$$\text{終わるまでの日数} = \frac{48}{6} = 8\,\text{日}$$

ということがわかります。

本文へ戻る