

関数3（二次関数の初歩）

2016 年 8 月 28 日

目次

このテキストの使いかた	3
第 1 章 おさらい：関数についての一般的な話	7
1.1 関数っていったい何？	7
1.2 関数の変域	11
1.3 関数の変化の割合	20
1.4 関数のグラフ	35
1.4.1 座標平面ってなに？	38
1.4.2 関数のグラフの作り方	49
1.4.3 関数のグラフを見ると、変化の様子が良くわかる	60
1.5 中学校で学ぶ関数の種類	64
第 2 章 x の 2 乗に比例する関数	65
2.1 そもそも x の 2 乗に比例する関数ってなに？	65
2.2 x の 2 乗に比例する関数の性質	69
2.3 x の 2 乗に比例する関数のグラフとその特徴	75
2.4 x の 2 乗に比例する関数の式を求める話	96
2.5 x の 2 乗に比例する関数の変域を求める話	97
2.6 x の 2 乗に比例する関数の変化の割合	109
2.7 関数 $y = ax^2$ のグラフと関数 $y = mx + n$ のグラフの交点を求めるには	120

問の解答

141

このテキストの使いかた

日頃の学習では・・・

- テキストをていねいに読んでいきましょう。

このテキストは、きちんと言葉を使ってていねいな説明が書かれています。記号や数式が並んでいるだけの、意味不明のものではありません。ひとつひとつ言葉を大切に、解き方ではなく考え方を学び取るようにしてください。そして、書いてあることに対して、「あーそういうことか」とか「えーよくわからない」とか「これ、ちがうんじゃないの?」といった反応をしてください。数学は自分の頭を使って考えていく科目ですから立ち止まって考えることがとても大切なのです。

- テスト直前に勉強を始めるのではなく、テストで力を発揮できるように前もって準備をしておきましょう。

数学のように、自分の頭を使って「あーでもない、こーでもない」と考えながら学んでいく科目では、学習を始めてからしばらくの間はなかなか成果が出ない事があります。しかし少し我慢をして学習を続けていくうちに、あるとき、驚くような力が付いていることに気づくことがあります。つまり、実力は初めのうちはゆっくり伸びていき、あとからぐんと伸びることが多いのです。

- 例題を学ぶときには、解答を読む前に、できればまず自分の力で解くことができるかどうか試してみましょう。

数学の学習では、誰かから教わっただけのことよりも自分で悩んで考えたことの

ほうがよく身につきます。紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。

- 例題の学習ができたなら、この問題がテストに出ても自分の力だけで解けるかどうか想像してみましょう。そして心配なものには印を付けておきましょう。

日頃から自分の実力をつかんでおくのとテスト対策がしやすくなります。

- 問はもちろん、まず自分の力で解くことができるかどうか試してみてください。

紙と筆記用具を使って実際に答案を書いてみてください。それができたらテキストの解答をていねいに読んで自分の考えと比べてみましょう。そうすれば理解が深まるでしょう。

- 問を解き終わって答え合わせをしたら、間違っただけのものには印を付けておきましょう。

日頃から自分の実力をつかんでおくのとテスト対策がしやすくなります。

- ひとつのひとりの節を読み終わったら、どんなことをその節で学んだのか思い出して「あらすじ」を言えるようにしておきましょう。紙と筆記用具を用意して、誰かにあらすじを伝えるにはどんなふうに説明すればよいか考え、文章を書いてみるととても効果があります。

中学生に「今日は学校の数学の授業でどんなことを勉強したの？」と聞いてみると、「えーと、何だっけ、そうだ、傾きとか習った。」と断片的なことを言えたりすることはあるのですが、改めて、「へえ、ところで傾きってなんなの？」と聞いてみると「えー、何だっけ、そうだ、なんか計算したり直線を描いてた。」ぐらいの答えしか返ってこないことが多いのです。専門用語を正しく言えるようになることも必要なことかもしれませんが、そんなことより大切なのは「どんなお話を学んだのか」ということです。数学は意味の無い記号操作を学ぶ科目ではなく、ちゃんとしたストーリーがあるものを学んでいるのです。ですから「お話のあらすじ」を理

解しておくことが大切なのです。

定期テスト対策では・・・

「日頃の学習」のところにも書いてありますが、数学のような科目は力がつくまでに時間のかかる科目です。テストに備えて十分な日数を確保しておきましょう。そして、「日頃の学習」で心配な例題や間違った問にちゃんと印を付けているとテスト対策が楽になります。

- テキストから試験範囲の例題や問を探して、印のついていないものがちゃんと解けるかどうか試してみましょう。
- 印を付けた例題や問を繰り返し復習して、テストに出ても大丈夫な問題を少しでも増やしておきましょう。

第1章

おさらい：関数についての一般的な話

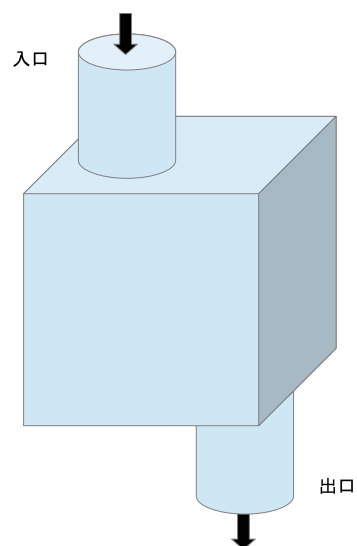
この章では、そもそも関数っていったい何なのかということをおさらいします。関数を理解するための二つのキーワードである「変域」、「変化の割合」についてもおさらいします。さらに、関数の性質を追求するときにとっても役に立つ「グラフ」についてもおさらいします。

1.1 関数っていったい何？

右の図を見てください。これは入り口と出口がついている箱です。

この箱の「入り口」にはあなたの好きな「数」を入れることができます。すると、ある「決まり」にしたがって「出口」からなにか「数」が出てくるようになっています。実は、この「決まり」のことを「関数」と呼んでいるのです。

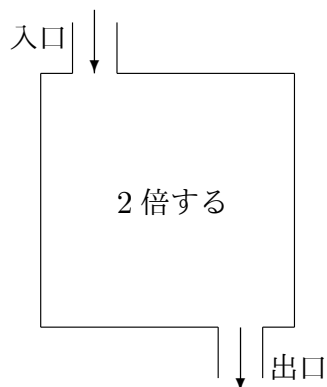
「この説明ではよくわからな—い」と思う人がいるかもしれませんね。そこで、もう少し詳しく説明することに



しましょう。さっきの説明には「決まり」という言葉が出てきました。ここで言っている「決まり」とは、例えば次のようなものです。

例1 「決まり」：入入口から入れた数を2倍して出口から出す

次の図を見てください。



この「決まり」に従うと、「入入口」から「1」を入れると「出口」から「2」が出てきますよね。また「入入口」から「-3」を入れると「出口」から「-6」が出てきますよね。

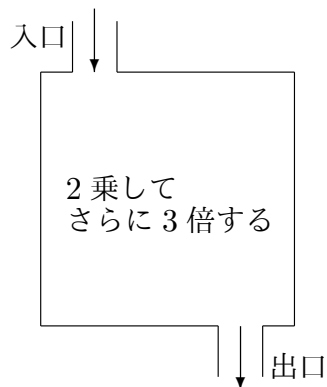
問1. 「入入口から入れた数を2倍して出口から出す」という「決まり」について考えることにします。この「決まり」に従うと、もし「入入口」から「 $-\frac{7}{4}$ 」を入れたら、「出口」から出てくる数はいくつになると思いますか。

答えを見る

では、今度はさっきまでとは別の「決まり」について考えることにしましょう。

例2 「決まり」：入入口から入れた数を2乗してさらに3倍して出口から出す

次の図を見てください。



この「決まり」に従うと、例えば「入り口」から 5 を入れると、5 がまず 2 乗されて 25 になり、さらに 25 が 3 倍されて 75 となって「出口」から出てきます。

問 2. 「入り口から入れた数を 2 乗してさらに 3 倍して出口から出す」という「決まり」について考えることにします。この「決まり」に従うと、もし「入り口」から -3 を入れたら、「出口」から出てくる数はいくつになると思いますか。

答えを見る

ここまでの説明で、「関数」とはどんなもののことなのか、わかってもらえたでしょうか。

「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」とか、入口から入れた数を乗してから、さらに 3 倍して出口から出す」というような「決まり」のことを数学では、**関数**と呼んでいるのです。

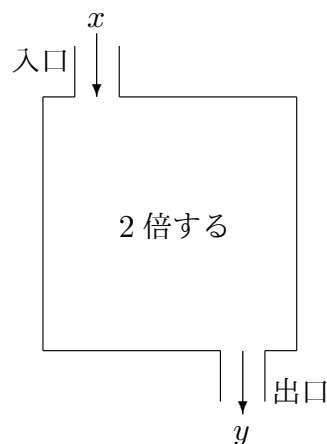
私たちはここまで、言葉をきちんと使って、関数とはどんなものなのかということを学んできました。でも、「決まり」を言葉だけで書いているのは大変ですよ。数学では、言葉だけで書いていると大変だなあ」と思うときに、文字や式を使います。今あなたが学習している「関数」では、よく次のようなやり方で、文字や式を使います。

- (1) 入口から入れる数は x という文字で表す。
- (2) 出口から出てくるも数は y という数で表す。
- (3) 「決まり」は、文字 x と文字 y が入っている「等式」で表す。

どういうことかわかりますか？まだ「良くわからな一い」と思っている人もいるかもしれませんね。そこで、例を使って、もっと詳しく説明しましょう。

例 3 「入口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」のことを考えることにします。

右の図を見てください。これは、「入口から入れた数を2倍して出口から出す」という「決まり」を図にしたものです。この例のすぐ前で言ったように、入口から入れる数は x という文字で表すことにしましょう。どうして文字を使うかというと、「入口から入れる数」といっても色々な数が考えられるからです。「入口から入れる数」は5になることもできますし、 -3 になることもできますし、 3.62 になることもできますし、 $-\frac{7}{3}$ になることも



できます。もちろんこのほかにも、色々な数になることができます。このように色々な数になることができるとき、数学では文字を使うのでしたね。ですから「入口から入れる数」を表すことにした x という文字は、色々な数の代わりとして使われるのです。

では、入口から x という数を入れると、どうなるのか考えることにしましょう。もう1度、箱の書いてある図を見てください。

「2倍する」という「決まり」なのですから、入口から x を入れればそれが2倍されて $2x$ になりますよね。ですから、出口から $2x$ が出てくるのです。ところでこの例のすぐ前で言ったように、「出口から出てくる数」を表すために y という文字を使うことにしてありましたね。いま、出口から $2x$ が出てくるわけですから、 y というのは $2x$ のことです。このように考えると、

$$y = 2x$$

という等式を書いておけば、「決まり」を数式で伝えることができます。つまり「関数 $y = 2x$ 」と書いてあったら、「入口から入れた数を2倍して出口から出すという決まりがあるんだよ」といっているのです。

問 3. 以下の文はどれも、関数を表す「決まり」を言葉で書いたものです。このような、言葉で書かれている「決まり」を数式で表してください。

- (1) 入口から入れた数を3倍してさらに5をひいた数を出口から出す。
- (2) 入口から入れた数を $-\frac{1}{2}$ 倍してさらに $\frac{3}{2}$ をたした数を出口から出す。

(3) 入口から入れた数を 2 乗してさらに -1 倍した数を出口から出す。

(4) 入口から入れた数を 2 乗してさらに $\frac{1}{3}$ をかけた数を出口から出す。

答えを見る

問 4. 以下の文はどれも、関数を表す「決まり」を数式で書いたものです。このような、数式で書かれている「決まり」を言葉を使って文で表してください。

(1) $y = -4x - 1$

(2) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

(3) $y = \frac{1}{4}x^2$

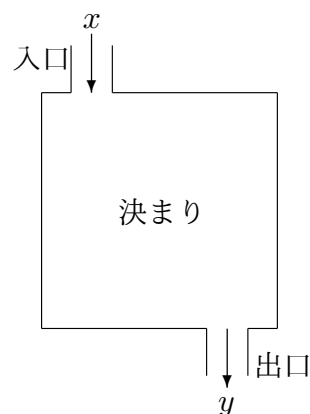
(4) $y = -3x^2$

答えを見る

1.2 関数の変域

これから、関数のことを考えるときにとても大切な 3 つのものについて学びます。それは、「変域」、「変化の割合」、「グラフ」と呼ばれています。ここでは、この 3 つのうち、まず「変域」と呼ばれているものについて学習しましょう。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでした。ところで、入口から入れる数を色々に変えていくと、出口から出てくる数もきっと色々変わってくることでしょう。



問 5. $y = 2x - 1$ という数式で表されている関数について考えることにします。そして、入口から、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ 、 $x = 3$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

答えを見る

問 6. $y = 2x^2$ という数式で表されている関数について考えることにします。

入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

答えを見る

問 7. $y = 2x - 3$ という数式で表されている関数について考えることにします。

- (1) 入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y							

- (2) 今度は (1) とは違い 0.5 きざみで、入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3.5$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2.5$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1.5$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0.5$ 、 $x = 0$ 、 $x = 0.5$ 、 $x = 1$ 、 $x = 1.5$ 、 $x = 2$ を入れてみることにします。このとき、出口からどんな数が出てくるのか調べて、次の表にまとめなさい。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y													

- (3) (1) と (2) の問題はどちらも、 $y = 2x - 3$ という関数で、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下にしていますが、(1) では 1 きざみ、(2) では 0.5 きざみで入口から入れる数を変えて調べました。つまり、(2) の調査は (1) の調査に比べると細かい調査ですね。そこでもし、1 きざみとか 0.5 きざみなんてケチなことはやめて、 x の値を 0.1 きざみで変えていくとか、さらに 0.01 きざみで変えていくとか、さらにがんばって 0.001 きざみで変えていったりしてもっと徹底的に細かく調査をしたら、どんな表ができるか想像してください。想像できたら次の質問に答え

てください。

質問：関数 $y = 2x - 3$ で、もし、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下の「ありとあらゆる」全ての数にすると、出口から出てくる y という数は、どんな数たちになりますか。

答えを見る

さて、今解いてもらった、問 7 の (3) はとても重要な問題です。「関数の変域」というものをこれからあなたに説明するのですが、問 7 の (3) がちゃんとわかっていないと、説明しても理解できないかも知れません。そこで「関数の変域」というものを説明する前に、次の例で、問 7 の (3) の答えを詳しく説明することにしましょう。

例 4 問 7 の (3) の答えについて

問 7 は、関数 $y = 2x - 3$ について考える問題でしたね。問 7 の (1) では入口から入れる数 x の値を 1 きざみで変えて、出口から出てくる数 y がいくつになるか調べていました。ちゃんと計算した人は、次のようになったはずです。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1

次に問 7 の (2) では、入口から入れる数 x の値を 0.5 きざみで変えて、出口から出てくる数 y がいくつになるか調べていました。つまり、細かい調査をしたわけです。ちゃんと計算した人は、次のようになったはずです。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

きざみをどんどん細かくして調べると、どんなことが新しくわかるのでしょうか。このことを考えるために、例えばこの 2 つの表で、 x が -4 から x が -3 へ変わる所だけ詳しく比べてみることにしましょう。

右の 2 つの表を見てください。

上の表は、「入口から入れる x を 1 きざみに変えた場合に出

x	-4	-3
y	-11	-9

口から出てくる y を調べた表」から、「 x が -4 から -3 へ変わる所だけ」を取り出したものです。

下の表は、「入口から入れる x を 0.5 きざみで変えた場合に出口から出てくる y を調べた表」から、「 x が -4 から -3 へ変わる所だけ」を取り出したものです。

x	-4	-3.5	-3
y	-11	-10	-9

もちろん、どちらの表も $y = 2x - 3$ という式を使って y を計算したものです。ではここで、2つの表を見ながら、例えば、「出口から出てくる y が -10 になることがあるのかどうか」考えてみましょう。

上の表は x を 1 きざみで変えて調べたもので、「 x が -4 のときに y は -11 になる」ということと、「 x が -3 のときに y は -9 になるということ」が調べられています。つまり、 1 きざみの調査では、「 y は -11 になることがある」ということと、「 y は -9 になることがある」ということがわかるわけです。しかしこの調査では、「 y が -10 になることがあるのかないのかわからない」のです。念のためもう 1 度、少し言い方を変えて説明しましょう。 -10 というのは、 -11 と -9 の間にある数です。 1 きざみの調査の表の下段（つまり y の段）を見れば、 y が -11 や -9 になることがあるのはわかります。しかし、いくらこの表の y の段を見ても、 -10 という数はどこにも書いてないので「出口から出てくる y が -11 と -9 の間にある -10 という数になれるのかどうかはわからない」のです。

下の表は x を 0.5 きざみで変えて調べたものです。「 x が -4 のときに y は -11 になる」ということと、「 x が -3 のときに y は -9 になる」ということはもちろん調べられています。しかしそれだけではなくて、「 x が -3.5 のときに y は -10 になる」ということも調べられています。つまり、きざみを 0.5 きざみに変え細かい調査をしてみたら、「出口から出てくる y が、 -11 と -9 の間にある -10 という数になることがあるということがわかった」のです。

それでは、入り口から入れる x の値のきざみをもっと細かくして関数 $y = 2x - 3$ を調査するとどんなことがわかるのでしょうか。そこで今度は、入口から入れる x を 0.1 きざ

みで変えて調査することにしましょう。0.1 きざみですから全部調べるのは大変です。そこでとりあえず、さっきの表と比べるために x が -4 から -3 へ変わる所を 0.1 きざみで調べることにします。そうすると、次のような表ができるはずです。(電卓などを使っても良いからあなたも自分で計算してたしかめてください。)

x	-4	-3.9	-3.8	-3.7	-3.6	-3.5	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3
y	-11	-10.8	-10.6	-10.4	-10.2	-10	-9.8	-9.6	-9.4	-9.2	-9

思い出してください。 x を 1 きざみで変えて調べた時は、「 y は -11 になれる」ということと、「 y は -9 になれる」ということはわかりましたが、「 y は -11 と -9 の間にあるほかの数になれるかどうか」ということはわかりませんでした。次に x を 0.5 きざみで変えて調べた時は、「 y は -11 になれる」ということと、「 y は -9 になれる」ということだけでなく、さらに、「 y は -11 と -9 の間にある -10 という数になれる」ということもわかりました。しかし、 -11 と -9 の間には、 -10 のほかにもたくさん数があります。0.5 きざみの調査では、 y が、このような「ほかにもある数」になれるのかどうかわかりません。ですが、今、もっと細かい調査、つまり 0.1 きざみの調査をして表を作りましたね。それでは、今作った表の y の段を見てください。これを見ると、「 y は -11 や -9 や -10 だけではなく、 -10.8 とか、 -10.6 とか、 -10.4 とか、 -10.2 とか、 -9.8 とか、 -9.6 とか、 -9.4 とか、 -9.2 になれる」ことがわかります。つまり、 -11 と -9 の間にある、「けっこう色々な数」になれることがわかります。しかし 0.1 きざみの調査では、これが限界です。 -11 と -9 の間には、さらにたくさんの「ほかの数」があるのです。例えば、 -10.1 とか -9.45 とか -9.2431 とか... いくらでもあるのです。 y がこのような数になれるのかどうか、0.1 きざみの調査ではわからないのです。

というわけで、さらにきざみを細かくして、入り口から入れる x の値を 0.01 きざみで変えて調べて表を作るとか、0.001 きざみで調べて表を作るとか、0.0001 きざみで調べて表を作るというようにしていくとどうなるのか想像してほしいのです。

実は徹底的に細かい調査をしていくと、 x が -4 から -3 へ変わっていく所では、「 y は -11 と -9 の間にあるどんな数にもなれる」ということがわかってきます。つまり、「入

口から -4 以上 -3 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -11 以上 -9 以下のありとあらゆる数が出てくる」ということがわかってくるのです。

このようにして、きざみをどんどん細かくした調査のことを想像していけば、 $y = 2x - 3$ という式で表される関数では、入口から -4 以上 2 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -11 以上 1 以下のありとあらゆる数が出てくるということが想像できるでしょう。

ではこれからいよいよ、「関数の変域」という言葉をあなたに教えます。問7の(3)や、例4では、「関数 $y = 2x - 3$ では、入口から入れる x として、 -4 以上 2 以下のありとあらゆる数を使うと、出口から出てくる y は、 -11 以上 1 以下のありとあらゆる数になる」ということを詳しく学習しましたね。数学では、「入口から入れる x という数の範囲」のことを x の変域と呼んでいます。また、「出口から出てくる y という数の範囲」のことを y の変域と呼んでいます。ですから、さっきの話では、「 x の変域は -4 以上 2 以下（のありとあらゆる数）」ですし、「 y の変域は -11 以上 1 以下（のありとあらゆる数）」ということです。数学っぽく書きたいときは、あなたも知っている不等号というものを使って、「 x の変域は $-4 \leq x \leq 2$ 」、「 y の変域は $-11 \leq y \leq 1$ 」と書けばよいのです。つまり、関数の話をしているときに、「 x の変域は -4 以上 2 以下」と書いてあったら、「入口から -4 以上 2 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」と言っているのです。そして、「 y の変域は -11 以上 1 以下」と書いてあったら、「出口から -11 以上 1 以下のありとあらゆる数が出てくるぞ」と言っているのです。

例題 1 $y = -2x + 5$ という式で表される関数について考えます。 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ のとき、 y の変域がどうなるのか調べなさい。

解答

まず、念のため、この問題の意味を確認しておきましょう。関数を表す式が $y = -2x + 5$ ですから、この関数は「入口から入れた x という数を -2 倍してさらに 5 をたして出口から出す」という「決まり」ですね。また、 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ ですから、「入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」と言っているのですね。このとき y の

変域、つまり「出口から出てくる数の範囲」を調べてくれというのがこの問題です。そこで、出口から出てくる y という数はどんな数になれるのか表を作って調べることしましょう。次の表を見てください。これは入口から入れる x を -3 から 5 まで、 1 きざみで変えて調べたものです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5

では、この表の y の段を見てみましょう。 y は 11 や 9 や 7 や 5 や 3 や 1 や -1 や -3 や -5 になっています。どうも、一番小さくても -5 で、一番大きくても 11 のようです。しかしこの調査で安心してはいけませんね。この調査は 1 きざみです。きっと、もっと詳しく調べたほうが良いですよ。そこで、 0.5 きざみで調べて表を作ってみます。そうすると、次のような表ができるはずです。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

では、 y の段を見てみましょう。さっきより細かいことがわかります。 x の値を 1 きざみで変えて調べた表では、 y が 10 とか 8 とか 6 などになるのかどうかわからなかったのですが、 x を 0.5 きざみで変えて調べたこの表を見ると、 y が 10 とか 8 とか 6 などになるのがはっきりとわかります。

では、もっともっと細かいきざみで調査するとどうなるのか想像してください。どうですか？ 11 と -5 の間にある、ありとあらゆる数が出口から出てくるって想像できますか。例えば、さっき作った 2 つの表では y が 8.5 になれるのかどうかわかりませんが、入口から入れる x の値をもっと細かいきざみで変えて詳しく調べれば、 y は 8.5 にだってなれるということがわかるのです。例えば、入口から入れる x を 0.01 きざみで変えて調べた人は、 x を -1.75 にすると y が 8.5 になるって気づいたはずです。 -1.75 は -3 以上 5 以下の数です。ですからこの問題では、 -1.75 は入口から入れることができます。そうすると、出口からちゃんと 8.5 が出てくるのです。計算して確かめてください。どうですか？ このように、一生懸命細かい調査のことを想像してみれば、入口から -3 以上 5 以下

のありとあらゆる数を入れていくと、出口から -5 以上 11 以下のありとあらゆる数が出てくることが悟れるでしょう。というわけで、この問題の答えは

$$y \text{ の変域は } -5 \leq y \leq 11$$

ということになります。

例題 2 $y = x^2$ という式で表される関数について考えます。 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ のとき、 y の変域がどうなるのか調べなさい。

解答

まず、念のため、この問題の意味を確認しておきましょう。関数を表す式が $y = x^2$ ですから、「入口から入れた x という数を 2 乗して出口から出す」という「決まり」ですね。また、 x の変域が $-3 \leq x \leq 5$ ですから、「入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れるぞ」といっているのですね。このとき y の変域、つまり「出口から出てくる数の範囲」を調べてくれというのが、この問題です。そこで、出口から出てくる y という数はどんな数になれるのか、表を作って調べることにしましょう。次の表を見てください。これは入口から入れる x を -3 から 5 まで、1 きざみで変えて調べたものです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25

では、この表の y の段を見てみましょう。 y は 9 や 4 や 1 や 0 や 1 や 4 や 9 や 16 や 25 になっています。ちょっと複雑なことが起きている感じがしますねえ。9 とか 4 とか 1 は 2 回も出口から出てきていますね。まあそういうことはあっても、出口から出るのは、一番小さくても 0 で、一番大きくても 25 のようです。しかし、この調査で安心してはいけませんね。この調査は 1 きざみです。。きっと、もっと詳しく調べたほうが良いですよ。そこで、0.5 きざみで調べて表を作ってみます。そうすると、次のような表ができます（電卓などを使っても良いからあなたも自分で計算してたしかめてください。）

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16	20.25	25

では、 y の段を見てみましょう。さっきより細かいことがわかります。例えば、さっきの表では、 y が 9 と 4 の間の数になるのかどうかわかりませんよね。ですがこの表を見ると、 y は 6.25 になるので、9 と 4 の間の数になることもあるようです。また、 y が 4 と 1 の間の数になることもあるようです。

では、 x の値を 1 きざみや 0.5 きざみではなく、もっともっと細かいきざみで変えて調査するとどうなるのか想像してください。どうですか？ y の段ですが、左から右へ見ていくと、どうも、9 から始まって、少しずつだんだん減っていき、そのうち 0 になり、その先は少しずつだんだん増えて、最後に 25 になるようですね。一方的に増えたり減ったりするわけではありませんが、とにかく、0 と 25 の間にある、ありとあらゆる数が出てくるって想像できますね。このように、一生懸命、細かい調査のことを想像してみれば、入口から -3 以上 5 以下のありとあらゆる数を入れていくと、出口から 0 以上 25 以下のありとあらゆる数が出てくるということが悟れるでしょう。ですから、この問題の答えは、

$$y \text{ の変域は } 0 \leq y \leq 25$$

ということになります。

大切な注意

この問題の解説の最後に、あなたに大切な注意をしておきます。よく、こういう「変域」の問題を解くとき、「はじっこの x の値」だけを使って計算し答えを出そうとする人がいます。どういうことかというと、「 x の変域は $-3 \leq y \leq 5$ であるというのを見た瞬間、 $y = x^2$ という式を使って

入口から $x = -3$ を入れると出口から $y = 9$ が出てくる。

入口から $x = 5$ を入れると出口から $y = 25$ が出てくる。

ということを計算し、

だから y の変域は $9 \leq y \leq 25$ となる。

と考える人がよくいます。でも、この考え間違ってますよね。はじっこの x の値である -3 と 5 だけを使って調査をしてもだめですよ。 -3 と 5 の間にある数のことも調査しないと本当のことはわからないのです。だってこの問題では、例えば入口から 0 だって入れることができるんですよ。だったら出口から 0 が出てきますよね。また例えば入口から 2 だって入れることができるんですよ。だったら出口から 4 が出てきますよね。 9 から 25 までしか出てこないなんてうそですよ。

問 8. 以下の関数で x の変域が以下のようにになっているとき、 y の変域を必ず表を作って調べなさい。

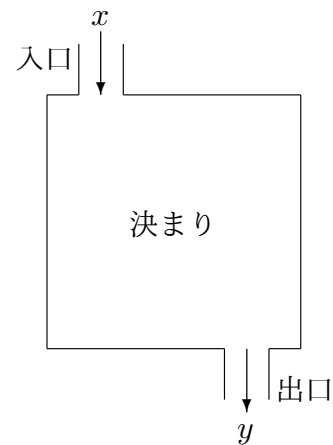
- (1) 関数 $y = -3x + 2$ で x の変域が $1 \leq x \leq 5$ のときの y の変域
- (2) 関数 $y = 2x - 7$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のときの y の変域
- (3) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $1 \leq x \leq 4$ のときの y の変域
- (4) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域
- (5) 関数 $y = x^2$ で x の変域が $-4 \leq x \leq 4$ のときの y の変域

[答えを見る](#)

1.3 関数の変化の割合

関数のことを考えるときにとても大切な、3つのものがあるのでしたね。それらは、「変域」、「変化の割合」、「グラフ」と呼ばれているのです。前の節では、この3つのうち、「変域」と呼ばれているものについて学習しました。ここではこれから、「変化の割合」と呼ばれているものを学習することにします。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ出口から出てくるのです。



そして前の節では、「入口から入れる数 x を -5 以上 3 以下のありとあらゆる数にする」というようなことを考え、そんなことをすると「出口から出てくる数 y はどんな範囲の数になるのか」ということを気にしたのでした。

これから少し違うことを考えます。入口から入れる x を変えてみることに変わりはないのですが、次のような点が違います。

- (1) 入口から入れる x は 2 個だけにします。そして、どちらの数を先に入れたのか覚えておきます。つまり、初めにいくつを入れて、次にいくつを入れたのか、ちゃんと順番も覚えておきます。
- (2) (1) のようにすると、入口から入れる x は 2 個だけですから、出口から出てくる y は 2 個だけになります。ところで、(1) では入り口から入れる順番を気にしていたのですから、出口から出てくる数も順番が大切です。つまり、初めに入れた x に対応して出てくる y と、あとから入れた x に対応して出てくる y を取り違えてはいけません。どちらが先に出てきて、どちらがあとに出てきてのか覚えておくのです。
- (3) 後から入れた x は初めに入れた x と比べると、どれだけ増えているのか計算しておきます。つまり、後から入れた x と先に入れた x の差を求めておくのです。
- (4) 後から出てきた y は初めに出てきた y と比べると、どれだけ増えているのか計算しておきます。つまり、後から出てきた y と先に出てきた y の差を求めておくのです。

どうですか？どんなことに注目しておくのかわかりましたか？少し話がごちゃごちゃしてきたので例を使って説明しましょう。

例 5 「入口から入れた数を 2 倍してさらに 1 をひく」という「決まり」の関数について

考えることにします。数式では、 $y = 2x - 1$ ですね。この関数で、入口から、初め 3 を入れ、次に 7 を入れる場合の話をして。そして、この例の前に説明した (1) から (4) は、どんなふうになるのか説明します。

- (1) 初め入口から $x = 3$ を入れ、次に入口から $x = 7$ を入れるのでしたね。(3 と 7 を入口から入れるわけですが、どっちを先にいれ、どっちをあとに入れたのかちゃんと覚えていてくださいね。) 今考えたことを、この後のために、次のような表を作っておくことにします。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	3		7
y			

- (2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、 $y = 2x - 1$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = 3$ を入れるのですから、 $y = 2x - 1$ という数式を使って計算してみると、初めに出てくる y は、

$$2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

ですね。

次は、入口から $x = 7$ を入れるのですから、 $y = 2x - 1$ という数式を使って計算してみると、次に出てくる y は、

$$2 \times 7 - 1 = 14 - 1 = 13$$

ですね。

つまり、先に 5 が出てきて、後に 13 が出てくるわけです。今、考えたことを、(1)

で作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
	↓	↓
x	3	7
y	5	13
	↑	↑
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は 3 でした。あとから入れた x は 7 でした。ということは、後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているかという、4 増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$7 - 3 = 4$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
	↓	↓
x	3	7
	4 増えている	→
y	5	13
	↑	↑
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (4) 先に出てきた y は 5 でした。あとから出てきた y は 13 でした。ということは、後から出てきた y は先に出てきた y よりどれだけ増えているかという、8 増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$13 - 5 = 8$$

増えているということがわかるわけですね。これも最後に表に追加して書いておきましょう。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	3	4 増えている	7
→		
y	5		13
→		
		8 増えている	
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

(1) から (4) まで調べたことを、このような表を作ってまとめておくと便利なのです。

問 9. 以下の文の空欄や表の空欄に正しい数を記入しなさい。

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、 $y = 3x - 5$ ですね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をしてします。そして、「 x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

(1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	<input type="text"/>		<input type="text"/>
→		
y	<input type="text"/>		<input type="text"/>

(2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、 $y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

初めに出てくる y は

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

次に出てくる y は

ですね。つまり、先に が出てきて、後に が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
	↓	↓
x	-2	4
y	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	↑	↑
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\square - (\square) = \square$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
	↓	↓
	↓ <input type="text"/> 増えている	↓
x	-2	4
→	
y	-11	7
	↑	↑
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\square - (\square) = \square$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11→	7
	↑	□ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

x は □ 増え、 y は □ 増える

ということがわかりました。

答えを見る

問 10. 次の関数で、 x の値を次のように変えたとき、「 x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べて答えなさい。

- (1) 関数 $y = 2x + 5$ で、 x を -1 から 5 へ変える（入口から先に $x = -1$ を入れ、後に $x = 5$ を入れるという意味ですよ）
- (2) 関数 $y = -3x + 2$ で、 x を -5 から -2 へ変える（入口から先に $x = -5$ を入れ、後に $x = -2$ を入れるという意味ですよ）
- (3) 関数 $y = x^2$ で、 x を 1 から -4 へ変える（入口から先に $x = 1$ を入れ、後に $x = -4$ を入れるという意味ですよ）
- (4) 関数 $y = x^2$ で、 x を 4 から 1 へ変える（入口から先に $x = 4$ を入れ、後に $x = 1$ を入れるという意味ですよ）

答えを見る

では、話を進めましょう。

これまで、「 x を 1 から 4 へ変える」とか「 x を 7 から 1 へ変える」というように、入口から入れる x をある数から別の数へ変えるということを考えてきました。これからもそういうことを考えるのですが、ここで言葉を統一することにしましょう。どういうことかというところ…

例えば、「 x を 1 から 4 へ変える」場合には、 x は 3 増やされています。

これに対して例えば、「 x を 7 から 1 へ変える」場合には、 x は 6 減らされています。

このように、 x は増えることもあれば減ることもあるわけです。そこでこれからは、 x が減る場合は負の数を使って「増える」という言葉に統一することにしましょう。例えば、 x は 6 減らされたと言う代わりに、負の数を使って x は -6 増やされたと言うことにするのです。そうすると、プラスの数を使うときは x は増えていることを意味しますし、マイナスの数を使うときは x は減っていることを意味します。

問 11. 次の関数で、 x の値を次のように変えたとき、「 x はどれだけ増やされているのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか」を調べて答えなさい。

- (1) 関数 $y = 2x - 1$ で、 x を -3 から -5 へ変える（入口から先に $x = -3$ を入れ、後に $x = -5$ を入れるという意味ですよ）
- (2) 関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ で、 x を 4 から -6 へ変える（入口から先に $x = 4$ を入れ、後に $x = -6$ を入れるという意味ですよ）
- (3) 関数 $y = 3x^2$ で、 x を -3 から -1 へ変える（入口から先に $x = -3$ を入れ、後に $x = -1$ を入れるという意味ですよ）
- (4) 関数 $y = 3x^2$ で、 x を -1 から -3 へ変える（入口から先に $x = -1$ を入れ、後に $x = -3$ を入れるという意味ですよ）

答えを見る

ではいよいよ、「関数の変化の割合」とは何なのか説明することにしましょう。

これまで、ある 1 つの関数を決めてから、入口から入れる x をある数から別の数へと変え、そのときに出口から出てくる y がいくつからいくつへ変わるのかということを気にしてきました。そして特に、「入口から入れる x はどれだけ増やされたのか」ということと、

「出口から出てくる y はどれだけ増えたか」ということを気にしました。ここで、さらに次のような分数を作ることになります。

$$\frac{\text{出口から出てくる } y \text{ がどれだけ増えたか}}{\text{入口から入れた } x \text{ がどれだけ増やされたか}}$$

このようにして作られる分数の事を、「**変化の割合**」と呼んでいます。この説明だけでは「よくわかんない」という人もいるかもしれませんね。そこで例を使って説明することにしましょう。

例6 関数 $y = -2x^2$ で、 x を -3 から 5 へ変えるときの変化の割合を計算してみます。これまで学習してきたとおりの順番で考えていきます。

- (1) 初め、入口から $x = -3$ を入れ、次に入口から $x = 5$ を入れるのでしたね。(-3 と 5 を入口から入れるわけですが、どっちを先にいれ、どっちをあとに入れたのかちゃんと覚えていてくださいね。) 今考えたことを、この後のために次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x	あとに入れた x
	↓	↓
x	-3	5
y		

- (2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。初め入口に $x = -3$ を入れるのですから、初めに出てくる y は、

$$-2 \times (-3)^2 = -2 \times 9 = -18$$

ですね。

次は、入口から $x = 5$ を入れるのですから、次に出てくる y は、

$$-2 \times 5^2 = -2 \times 25 = -50$$

ですね。

つまり、先に -18 が出てきて、後に -50 が出てくるわけです。今、考えたことを、(1) で作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	-3	5
y	-18	-50
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は -3 でした。あとから入れた x は 5 でした。ということは、後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているかというと、 8 増えているのですね。つまり、ひきざんを使えば、

$$5 - (-3) = 8$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	-3	5
y	-18	-50
	先に出てきた y	あとに出てきた y

8 増えている

- (4) 先に出てきた y は -18 でした。あとから出てきた y は -50 でした。ということは、後から出てきた y は先に出てきた y よりどれだけ増えているかというと、 -32

増えているのですね。つまり、ひきざんをすれば、

$$(-50) - (-18) = -32$$

増えているということがわかるわけですね。これも最後に、表に追加して書いておきましょう。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	8 増えている	↓
x	-3→	5
y	-18→	-50
	↑	-32 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

以上で、「 x は 8 増やされている」ということと、「 y は -32 増やされている」ということが調査できました。いよいよ、「変化の割合」の計算に取り掛かります。

- (5) 「変化の割合」を求めるには、この例の前に書いた説明どおりの分数を作ればよいわけです。ですから、

$$\text{変化の割合} = \frac{\text{出口から出てくる } y \text{ がどれだけ増えたか}}{\text{入口から入れた } x \text{ がどれだけ増やされたか}} = \frac{-32}{8} = 4$$

となるわけです。つまり、関数 $y = -2x^2$ で、 x を -3 から 5 へ変えるときの変化の割合は 4 であることがわかりました。

では、もう 1 度ここで、変化の割合についてまとめておきましょう。

関数の変化の割合とは

関数が 1 つあるとします。また、入口から入れる x という数を 2 つ用意します。ここではそれらを、「数その 1」、「数その 2」と呼ぶことにしておきます。また、入口から、「数その 1」を先に入れて、「数その 2」を後から入れることにします。このとき、

$$\frac{\text{出口から出てくる } y \text{ がどれだけ増えたか}}{\text{入口から入れた } x \text{ がどれだけ増やされたか}}$$

という分数を作ることにします。この分数のことを、今考えている関数で、 x を「数その 1」から「数その 2」へ変えたときの変化の割合と呼びます。

問 12. 以下の文の空欄や表の空欄に正しい数を記入しなさい。

「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、 $y = 3x - 5$ ですね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をしてします。そして、「 x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べ、最後に「関数 $y = 3x - 5$ で x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合」を求めることにします

- (1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	<input type="text"/>	<input type="text"/>
y		

- (2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、 $y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

初めて出てくる y は

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

次に出てくる y は

ですね。つまり、先に が出てきて、後に が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	-2	4
y	<input type="text"/>	<input type="text"/>
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\square - (\square) = \square$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	□ 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11		7
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

- (4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\square - (\square) = \square$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11→	7
	↑	□ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

x は □ 増え、 y は □ 増える

ということがわかりました。ということは、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

ということになりますね。

答えを見る

問 13. 次の関数で、 x の値を次のように変えるときの変化の割合を計算しなさい。

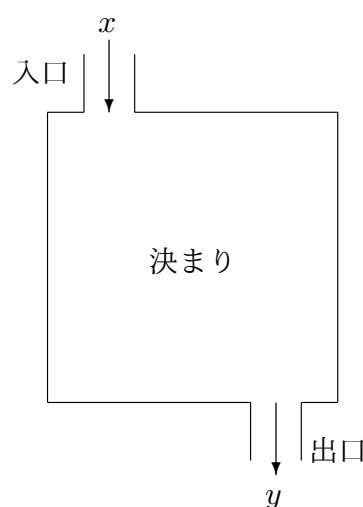
- (1) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 1 から 5 へ変える
- (2) 関数 $y = -2x + 3$ で x を -3 から -6 へ変える
- (3) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える
- (4) 関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える
- (5) 関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える
- (6) 関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える
- (7) 関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える
- (8) 関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える
- (9) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える
- (10) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を 3 から -3 へ変える

答えを見る

1.4 関数のグラフ

関数のことを考えるときにとても大切な3つのものについて学んでいる所ですね。前の節までで、3つのうち、「変域」と「変化の割合」の学習が終わりました。そこでこれから最後の1つ、「グラフ」について学習します。

右の図を見てください。関数とは、このような箱の中の「決まり」のことでしたね。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのでした。つまり、数 x を数 y に対応させる「決まりのことを関数と読んでいたのでした。また、入口から入れる数 x を色々に変えれば、たいていの場合、出口から出てくる数 y も変化するのでしたね。そこでここでは、次のようなことをテーマとして学習したいと思います。



テーマ 「入口から入れる x の変化」と、「出口から出てくる y の変化」の様子を一目でわかるようにするよい方法はないでしょうか？

実はもうすでに、あなたは「それなりに良い方法」を知っているのです。それは、「関数の表」を作ることですね。念のため、次の問で「関数の表」の作り方をおさらいすることにししましょう。

問 14. $y = -2x + 3$ という数式で表される関数について考えることにします。入口から入れる x の値として $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ を入れると出口から出てくる y がどんな値になるのか調べ、次の表にまとめてください。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

[答えを見る](#)

さて、「関数の表」の作り方は思い出せたでしょうか。問14の答えは、次のようになっています。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

この表を見れば、「 x の変化」につれて、「 y がどんなふうに変化していくのか」ということがそれなりに良くわかるでしょう。では、「 x の変化」につれて、「 y がどんなふうに変化していくのか」、次の問であなたに答えてもらうことにしましょう。

問15. 前の問14で、 $y = -2x + 3$ という数式で表される関数について考えることにしましたね。そして、入口から-3、-2、-1、0、1、2、3を入れると出口から y としてどんな数が出てくるのか調べ、「関数の表」を作りましたね。そうすると、次のようになったはずです。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

この表を良く見て次の質問に答えなさい。

- (1) この関数 $y = -2x + 3$ では、 x の値が増えるにつれて、 y の値はどのように変化していきますか。
- (2) この関数 $y = -2x + 3$ では、 x の値がある値から別のある値へ、「とにかく1増える」と、 y の値はどのように変化しますか。

[答えを見る](#)

どうですか、ちゃんと答えられましたか？念のためこの問15の答を覚えておきましょう。

う。あなたのためにもう一度ここに表を書いておきます。良く見てくださいね。

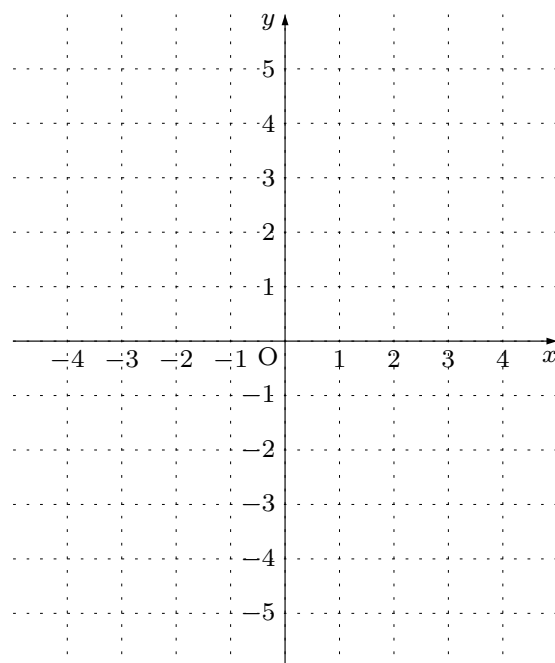
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

x が、-3、-2、-1、0、1、2、3 と増えていくにつれて、 y は9、7、5、3、1、-1、-3 と減っていきますね。そして特に、 x がとにかく1 増えると、どうも y は必ず2 減るらしいということもわかりますよね。（意味わかりますか？表を良く見ることにしましょう。例えば x が -3 から -2 の所を見てください。 x は -3 から -2 へ変わるので x は1 増えるわけですが、 y は9 から7 へ2 減ってますよね。今度は、 x が -2 から -1 の所を見てください。 x は -2 から -1 へ変わるので x は1 増えるわけですが、 y は7 から5 へ2 減ってますよね。また今度は、 x が -1 から 0 の所を見てください。 x は -1 から 0 へ変わるので x は1 増えるわけですが、 y は5 から3 へ2 減ってますよね。さらに、この表の右のほうを見て同じようなことを考えてみてください。やっぱり、どこを見ても、 x が1 増えると、 y は2 減ってますよね。）

このように、関数の表を作ると、「変化の様子」がそれなりに良くわかります。ですが、実は、もっと、「パッと見ただけ」で変化の様子がわかるように発明されたものがあるのです。それが関数のグラフと呼ばれるものなのです。それではこれから、「関数のグラフ」の作り方を教えることにしましょう。ただ、そのために、準備が必要です。関数のグラフを作るためには「座標平面」と呼ばれているものを使うのです。ですから、まず、「座標平面」のことを学んでから、「関数のグラフ」の作り方を学ぶことにしましょう。

1.4.1 座標平面ってなに？

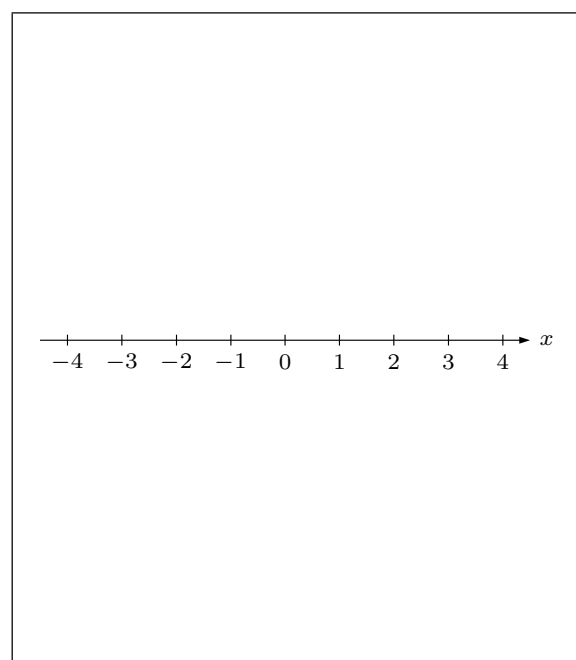
右の図を見てください。これが座標平面と呼ばれているものです。「あっ、こういうの、見たことある」と思った人もいるかも知れませんね。小学校でも、これと似たのを学びますから。小学校では、方眼紙を使ったり、もう印刷されているものを使ったりしたかもしれません。しかしこれから、あなたは、自分で「座標平面」を描かなくてはならないことが多くなります。ですから、座標平面の作り方をこれからあなたに教えることにしましょう。



座標平面の作り方

- (1) まず、紙を1枚用意します。なるべく大きく座標平面を作りたいので、なるべく、大きい紙を使いましょう。(もちろん、ノートを使ってもかまいません。)
- (2) 右の図を見てください。

(1) で用意した紙に、水平に、まっすぐな線を1本書きます。そして、矢印を右端につけ、右端に x という文字を書き、目盛りを打ちます。この、まっすぐな線は x 軸という名前と呼ばれています。紙の上のどこにこのまっすぐな線を書くのがよいのかということは、問題によって変わります。あなたが問題を良く頭に入れて色々と考えて決めるしかありません。まあ初めてです

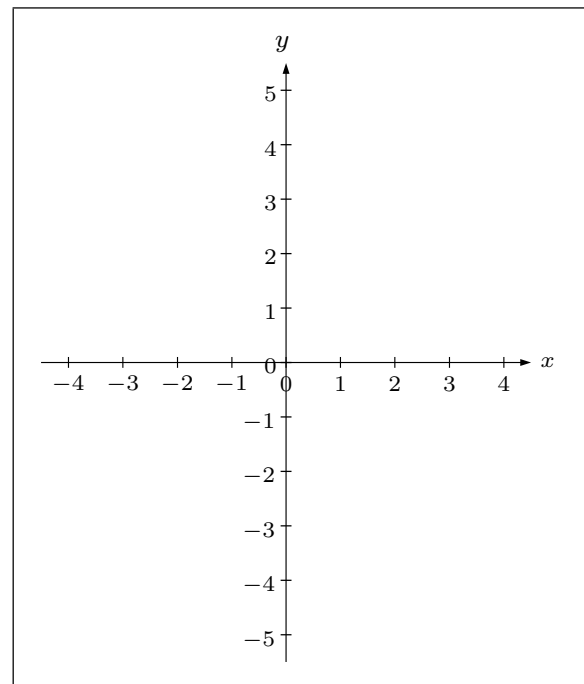


から、ここでは紙の真ん中あたりに書くことにしましょう。目盛りは普通、間隔が等しくなるように打ちます。目盛りを打つ間隔はあなたが考えて決めるしかありません。1 きざみで目盛りを打つのが良いのか、0.5 きざみで目盛りを打つのが良いのかというようなことは問題によって変わってくるのです。また、いくつからいくつまでの目盛りを作るのかということも、あなたが良く考えて決めるのです。まあ初めてですから、ここでは、 x が -4 から 4 の範囲で、1 きざみに目盛りを作ることにします。

結局ここでは、数直線を水平に書いたことになります。そしてこの数直線は、 x の値を読み取るために使われるのです。

(3) 右の図を見てください。

次は、この図のように、縦にまっすぐな線を書きます。どこに書いても良いというわけではありません。(1) で x 軸を書いたので、これから書くまっすぐな縦の線を書く場所は決まっているのです。どこに書くのかというと、(1) で作った x 軸の 0 の所を通るように書くのです。0 の所を通過、 x 軸に垂直になるように、縦にまっすぐな線を書くのです。もちろん、目盛りも打ちます。縦の線の目盛りは、 x



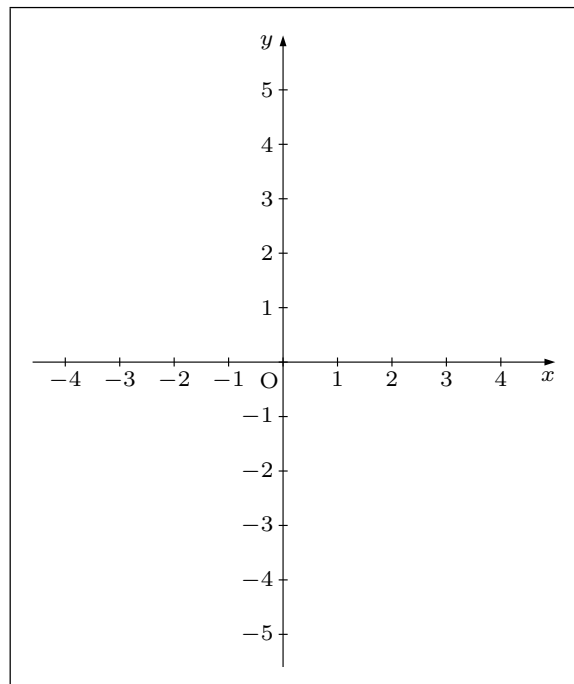
軸と交わる所が 0 になるようにしてつけます。目盛りの間隔は x 軸と同じにすると良いでしょう。また、一番上の端に矢印をつけ、 y という文字を書いておきます。このまっすぐな縦の線は y 軸という名前と呼ばれています。

S 結局ここでは、 x 軸の 0 のところを通るように、数直線を垂直に書いたことになります。そしてこの数直線は、 y の値を読み取るために使われるのです。

(4) (2) で水平なまっすぐな数直線を書きましたね。そしてこれは、「 x 軸」と呼ばれるのでした。また (3) では x 軸の 0 のところを通るように、垂直なまっすぐな数直

線を書きましたね。そしてこれは「 y 軸」と呼ばれるのです。そうすると、2 本の数直線は 0 のところで交わっているわけですが、目盛りをつけるときに書いた 0 が、2 個そばにあって、くっついていて見にくいですね。((3) の説明の図を見てください。) そこで、2 つの 0 は 1 つにまとめてしまいましょう。

右の図を見てください。 x 軸を書いたときにつけた 0 と、 y 軸を書いたときにつけた 0 を 1 つにまとめて、アルファベットの大文字の O に変えました。つまり、 x 軸と y 軸の交わる所に、O という大文字のアルファベットを書いたのです。(別に、このようにしなればいけないというわけではありません。昔からの習慣で、そうするようになっているだけです。このほうが見やすいですからね。)

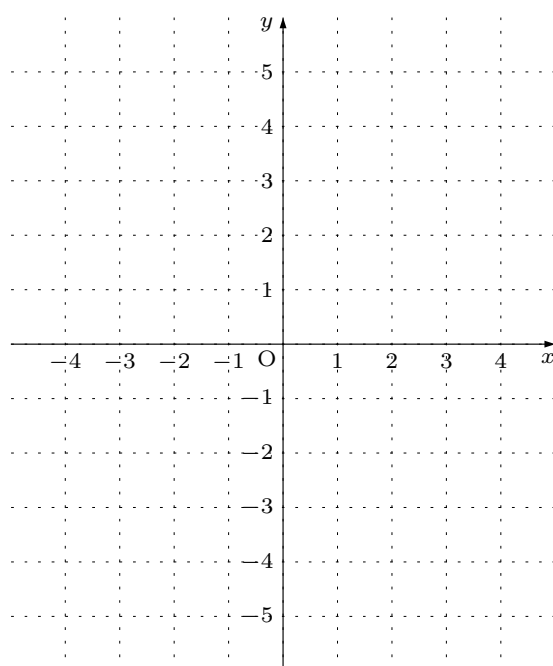


この場所 O、つまり x 軸と y 軸の交わる所は、原点と呼ばれています。

(5) 最後に、点線で、「格子」を付けます。

右の図を見てください。このように、方眼紙に似たものができるわけです。さっき、「点線で」と言いましたが、点線でなくても「薄く細い線」で描いても良いでしょう。

これで、座標平面の出来上がりです。



注意 (5) で格子を付けました。格子が付いている座標平面はとても使いやすいのですが、作るのが大変です。実は、かなり慣れてくると、格子が付いていなくても「心の目」を使うと、格子が見えるようになります。「心の目」で格子が見えるようになった人は、格子を付けるのをサボっても良いでしょう。

座標平面の作り方がわかったので、次は、座標平面を使う練習をしましょう。

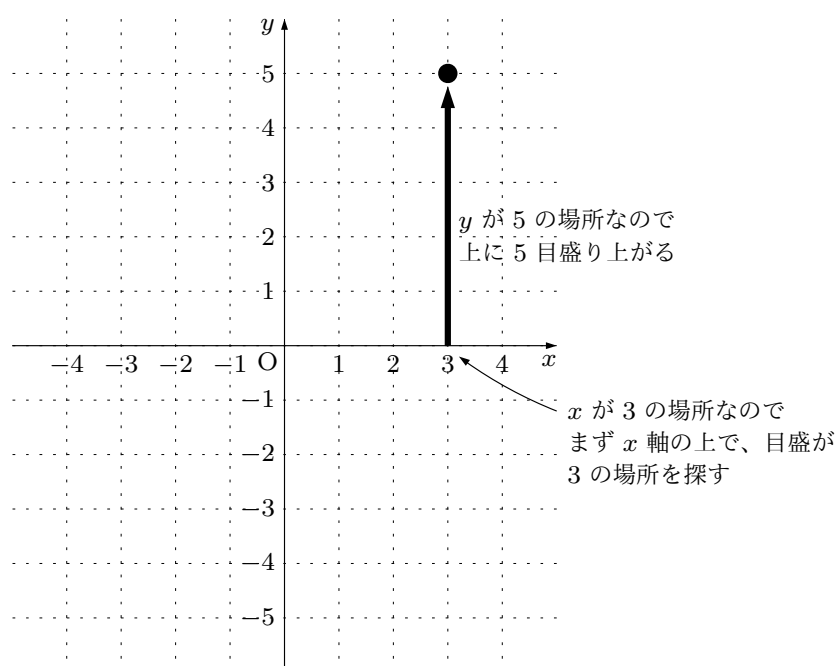
座標平面に点を打つ練習をしよう

2つの数を組にすると、座標平面に点を打つことができます。例を使って説明することにしましょう。

例 7 2つの数として、3と5を組にして座標平面に点を打ってみることにします。

組にしてあるということを強調するために、よく、 $(3, 5)$ のように書くことがあります。つまり、かっこを使って、かっこの中に2つの数を並べて書くのです。2つの数の間には「カンマ」を書きます。2つの数を並べる順番は重要です。つまり、 $(3, 5)$ と書いてあるのと $(5, 3)$ と書いてあるのは違うのです。注意してください。

それでは、2つの数の組として $(3, 5)$ を使って説明を続けます。あなたは、 $(3, 5)$ と書いてあるのを見たら、座標平面の「 x が3で、 y が5の場所」に点を打てばよいのです。次の図を見てください。黒丸の打ってある場所が $(3, 5)$ の場所です。

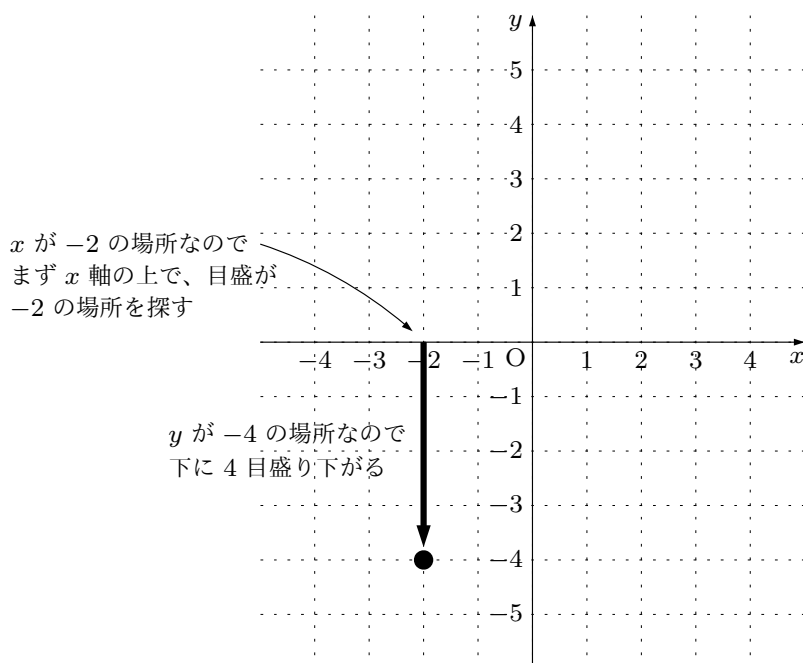


さっき、「 x が 3 で、 y が 5 の場所」と言いましたが、場所の探し方はわかりましたか？念のため詳しく説明しておきましょう。 x が 3 なので、まず x 軸を見て目盛りに 3 と書いてある場所を探します。さらに、 y は 5 なので、今探した場所、(つまり x 軸上にある、目盛りが 3 の場所) から上に 5 目盛り進むのです。そうすると $(3, 5)$ の場所にたどりつくのです。

例 8 今度は、2 つの数として、 -2 と -4 を組にして考えることにしましょう。

組にしてあるということを強調するために、 $(-2, -4)$ のように書いておきます。前の例で説明したように、かっこの中にある 2 つの数のうち、左に書いてあるのは x の値で、右に書いてあるのは y の値でしたね。

ですからあなたは、 $(-2, -4)$ と書いてあるのを見たら、「 x が -2 で、 y が -4 の場所」に点を打てばよいのです。次の図を見てください。黒丸の打ってある場所が $(-2, -4)$ の場所です。



さっき、「 x が -2 で、 y が -4 の場所」と言いましたが、場所の探し方はわかりましたか？念のため詳しく説明しておきましょう。 x が -2 なので、まず x 軸を見て目盛りに -2 と書いてある場所を探します。さらに、 y は -4 なので、今探した場所、(つまり x 軸

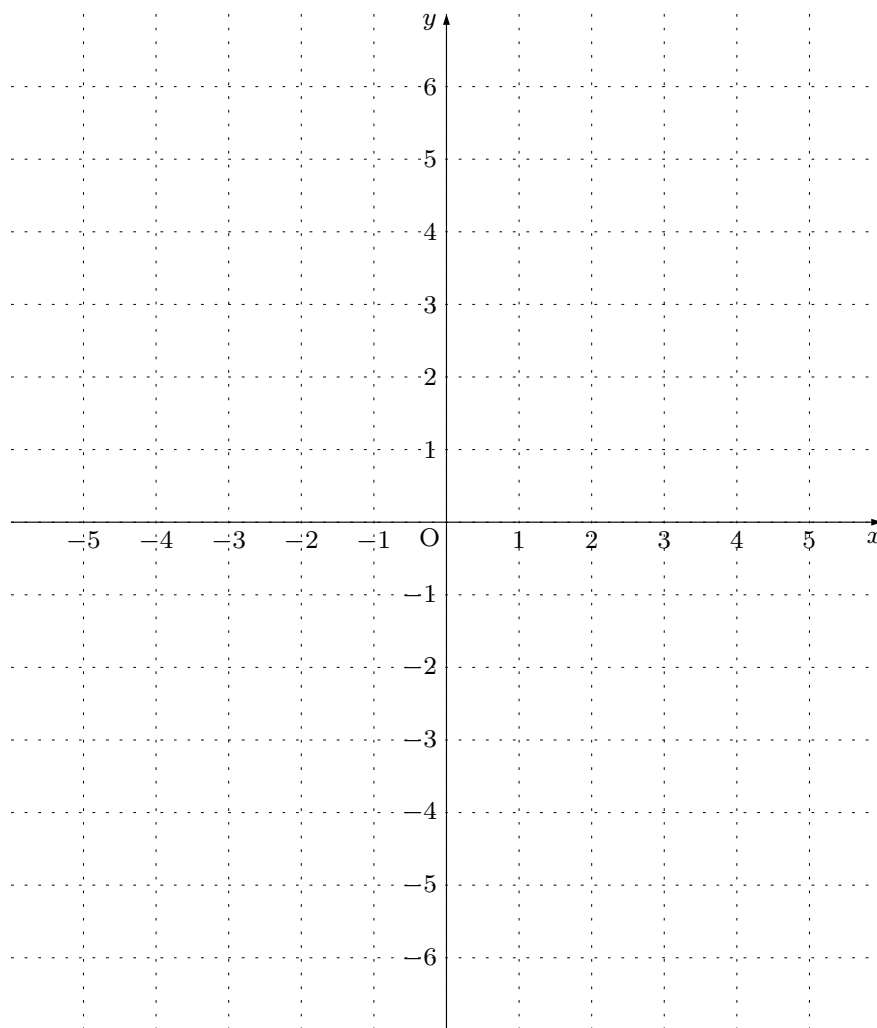
上にある、目盛りが -2 の場所) から下に 4 目盛り進むのです。そうすると $(-2, -4)$ の場所にたどりつくのです。

では、今度はあなたに点を打つ練習をしてもらいましょう。

問 16. 次の文を読んで、この問題の最後についている座標平面の上に点を打ちなさい。ただし、どの点がどの問題の答えなのかちゃんとわかるようにしておくこと。

- (1) x が 4 で、 y が 2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4, 2)$ の場所に点を打ちなさい。
- (2) x が 4 で、 y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4, -2)$ の場所に点を打ちなさい。
- (3) x が -4 で、 y が 2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4, 2)$ の場所に点を打ちなさい。
- (4) x が -4 で、 y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4, -2)$ の場所に点を打ちなさい。
- (5) x が 3.5 で、 y が -2 の場所に点を打ちなさい。つまり $(3.5, -2)$ の場所に点を打ちなさい。
- (6) x が $-\frac{5}{2}$ で、 y が $\frac{3}{2}$ の場所に点を打ちなさい。つまり $(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$ の場所に点を打ちなさい。
- (7) x が 4 で、 y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(4, 0)$ の場所に点を打ちなさい。
- (8) x が -4 で、 y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(-4, 0)$ の場所に点を打ちなさい。
- (9) x が 0 で、 y が 4 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0, 4)$ の場所に点を打ちなさい。
- (10) x が 0 で、 y が -4 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0, -4)$ の場所に点を打ちなさい。

(11) x が 0 で、 y が 0 の場所に点を打ちなさい。つまり $(0, 0)$ の場所に点を打ちなさい。

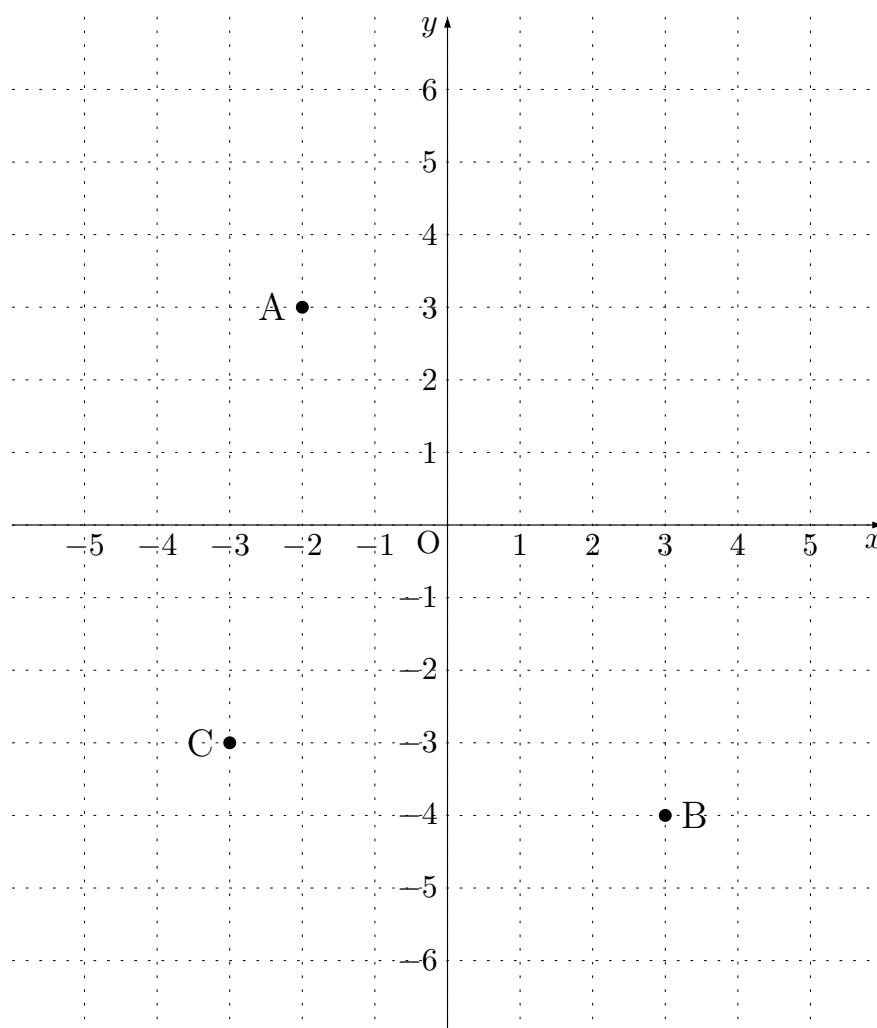
[答えを見る](#)

では話を進めることにしましょう。

これまで学習してきたように、座標平面の上の点の場所は、2つの数を組にすることによって伝えることができます。つまり、もしあなたがだれかに座標平面の上にある点の場所を伝えたいければ、その点の場所を指でさす代わりに、2つの数を組にして伝えれば良いのです。そして、2つの数の組は、例えば $(3, 5)$ のように書くのでした。この $(3, 5)$ ように、点を表している2つの数の組を、その点の座標と呼びます。かつこの中に書いてある2つの数のうち、左の数は x の値を表すので、特に x 座標と呼ばれています。また、右の数は y の値を表すので、特に y 座標と呼ばれています。ですから、 $(3, 5)$ という点の x 座

標は 3 で、 y 座標は 5 ということになります。また、点にはよく、アルファベットで名前をつけることがあります。例えば、「点 A」とか「点 B」のように呼ぶわけです。そして、例えば、 $(3, 5)$ のように表されている点が「A」と言う名前だったら、A と $(3, 5)$ をくっつけて、 $A(3, 5)$ と書くことがあります。ですから、あなたは、 $A(3, 5)$ と書いてあるのを見たら、「座標平面の上の、 x が 3 で、 y が 5 の所に点があるのだな。そして、その点の名前は A なのだな。」と思わなくてははいけません。

例 9 次の座標平面を見てください。3 つの点 A、B、C があります。



点 A の座標は $(-2, 3)$ で、点 B の座標は $(3, -4)$ で、点 C の座標は $(-3, -3)$ ですね。
また、原点 O の座標はもちろん $(0, 0)$ ですよ。

問 17. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $A(0, 5)$

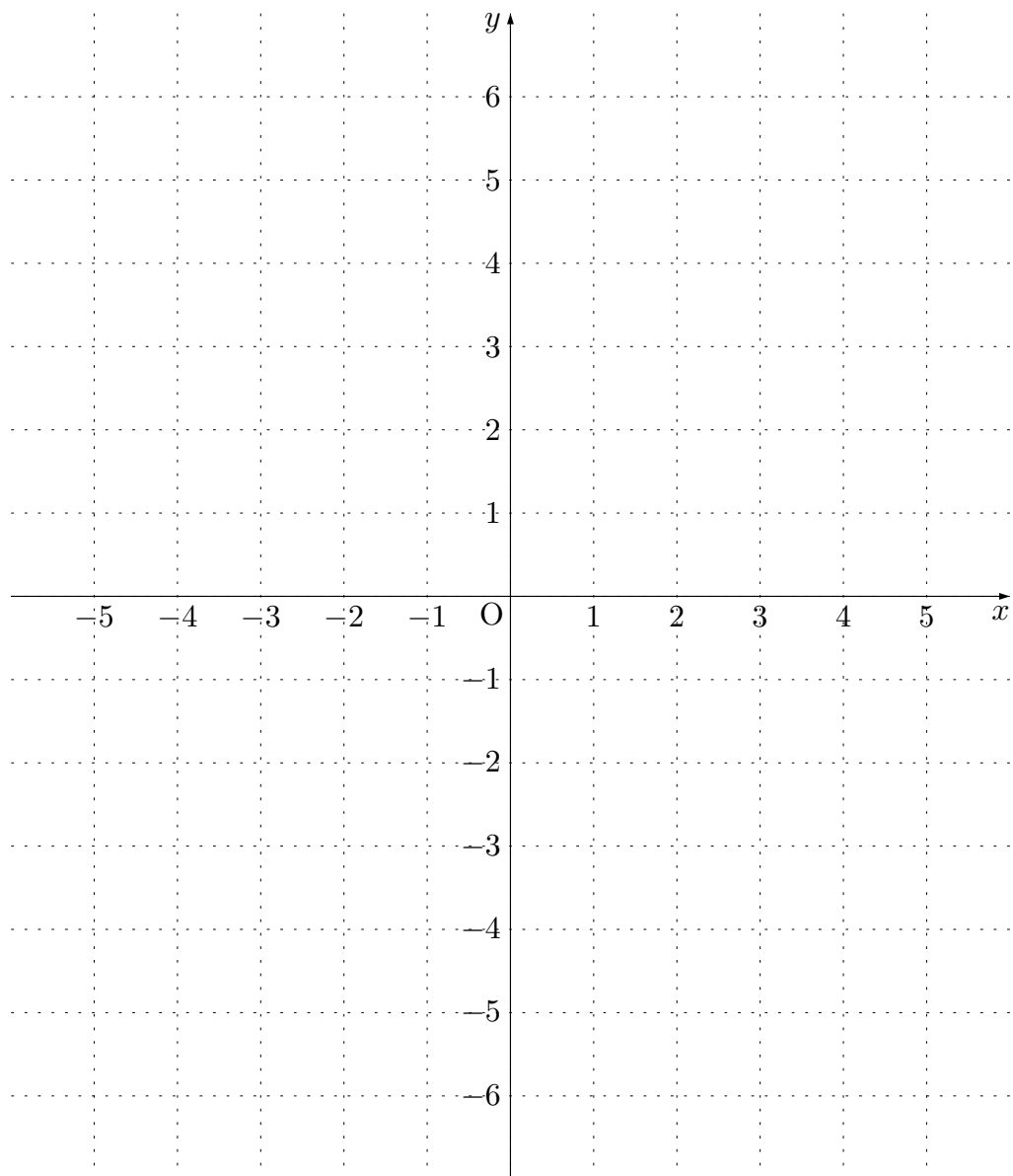
(2) $B(-5, 2)$

(3) $C(-3, -1)$

(4) $D(3, -1)$

(5) $E(-2, 3)$

(6) $F(-4, -6)$

[答えを見る](#)

問 18. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $A(1, 5.5)$

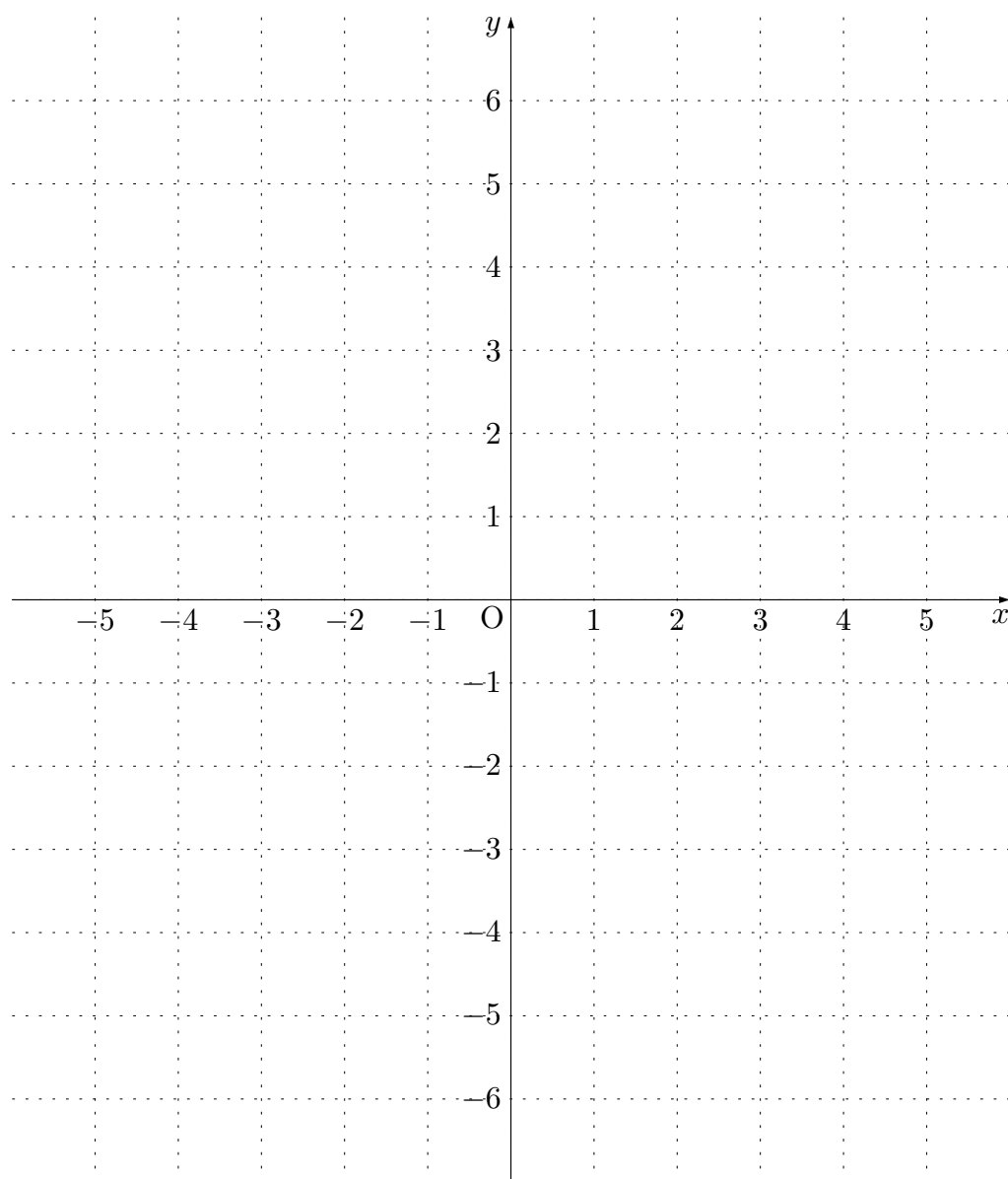
(2) $B(-5, 2.2)$

(3) $C(-3.5, -1.5)$

(4) $D(3.8, -1.6)$

(5) $E(-2.5, 3)$

(6) $F(-4.3, -6)$

[答えを見る](#)

問 19. 座標が、次のようになっている点を、この問についている座標平面の上に打ちなさい。点の名前を書いて、どれがどの点なのかちゃんとわかるようにしておくこと。

(1) $A\left(1, \frac{7}{2}\right)$

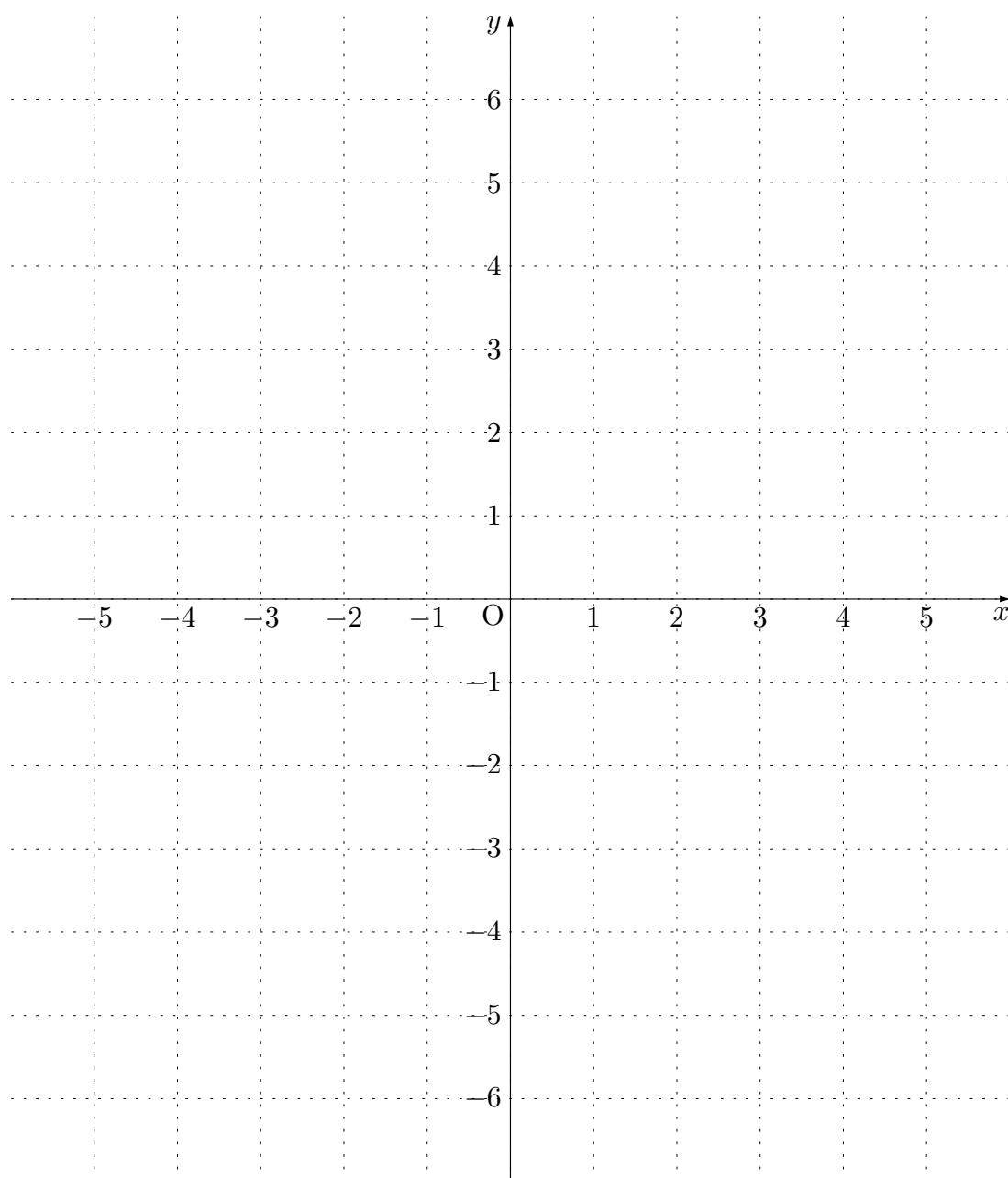
(2) $B\left(-5, \frac{3}{4}\right)$

(3) $C\left(\frac{9}{2}, -\frac{4}{5}\right)$

(4) $D\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

(5) $E\left(-2, \frac{12}{5}\right)$

(6) $F\left(-4.5, -\frac{9}{2}\right)$



1.4.2 関数のグラフの作り方

座標平面についての学習が終わりました。それではいよいよ、「関数のグラフ」の作り方を学習することにしましょう。例を使って説明していきます。

例 10 関数 $y = 2x - 1$ のグラフを作ることになります。

まず、準備として、この関数 $y = 2x - 1$ の表を作ります。調べる x の範囲ですが、ここでは「 x は -3 ぐらいから 3 ぐらいまで」にしておきましょう。また、どれぐらい細かく調査するのかということですが、まあここでは「1 きざみ」で調査をすることにしましょう。（本当は調べる範囲はできるだけ広いほうが良いのです。また調べる細かさ、つまりきざみもできるだけ細かいほうが良いのです。とは言っても、人間には限界があります。ですから、ためしにこのぐらいの範囲と細かさで調べてみるのです。それで困ったことが出てきたら、また後で調査を詳しくするのです。）すると次のような表ができるはずです。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

念のための注意をしておきましょう。この表の中には... が書いてあるところがあります。例えば、 x の段の 3 の右です。さっきも言ったように、本当はできるだけ範囲を広くして調査したいのです。しかし、「キリがない」ので「がまんしている」のです。本当は x が 4 の所とか 5 の所とか 6 の所... も調べたいのです。ですから、この表は、「本当は 3 より先もあるんだけどね」という気持ちを込めて... が書いてあるのです。ほかにも...

が書いてあるところがありますが、どれも同じような気持ちなのです。

では次へ進みましょう。次は、この表を見ながら座標平面に点を打つのです。どのように点を打つのかこれから説明しましょう。

この「関数の表」を左から見ていきます。そして x の値と y の値を組にして考えます。例えばこの表を左から順に見ていくと、まず、「 x が -3 で y が -7 」の所がありますね。(大丈夫ですか? x の段と y の段を縦に組にして考えるのですよ。だって、そもそも、入口から入れる x が -3 のときに、出口から出てくる y は -7 になるということなのですから。) ここを見たら、「 $(-3, -7)$ という座標で表される点」を座標平面の上に打つのです。もう一度念のために言います。この表には x が -3 で y が -7 の所があるので、座標平面の上で、 x が -3 で y が -7 の所に点を打つのです。

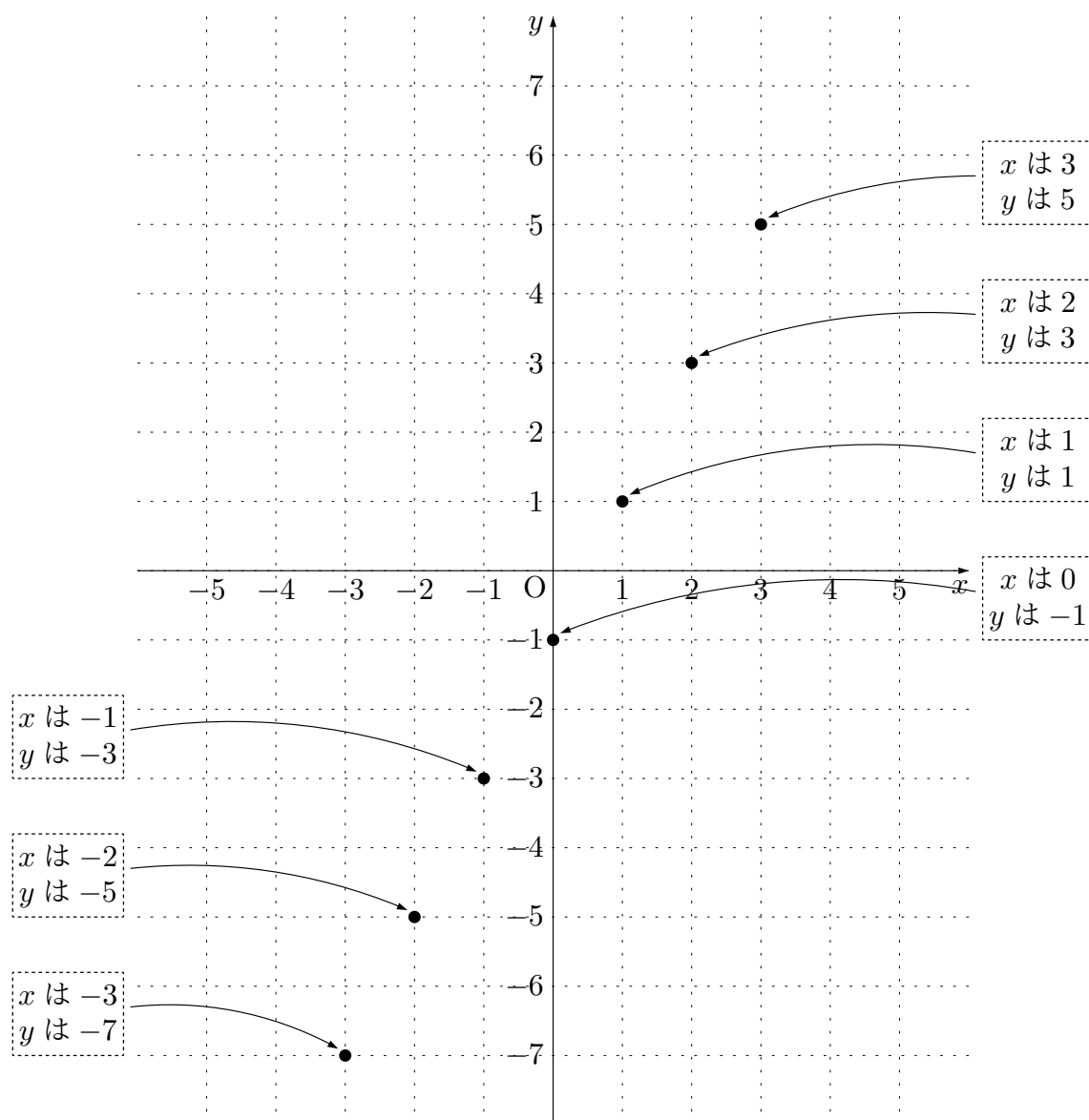
では次は、この表で、さっきの隣を見てみましょう。(あなたのためにもう一度表を書いておきます。)

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

今度は、 x は -2 で y は -5 ですね。ということは、今度は、座標が $(-2, -5)$ であるような点を座標平面の上の打つのです。

このようにして、この「関数の表」を見て、座標平面の上に点を次々に打っていくのです。そうすると、この「関数の表」では最後に、 x が 3 で y が 5 の所が出てきますね。ですから最後に、座標が $(3, 5)$ である点を座標平面の上に打つことになります。

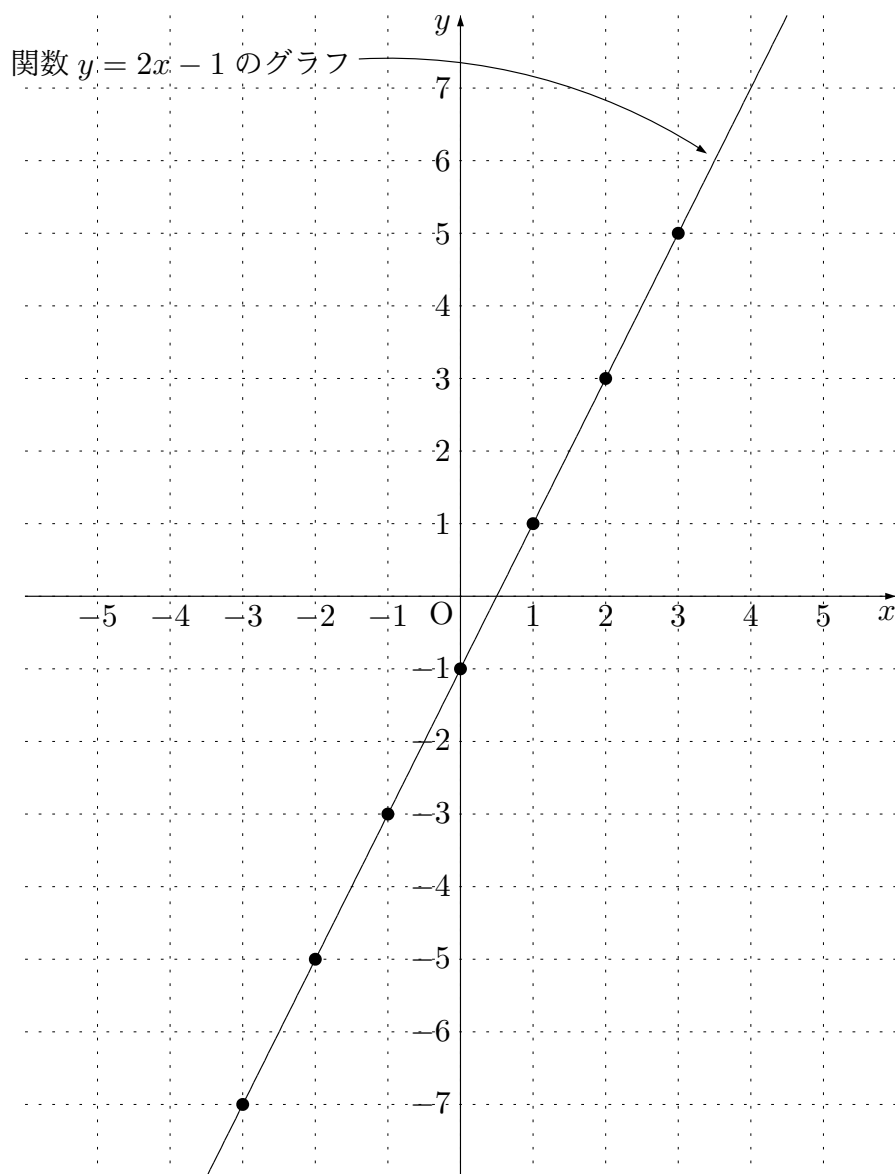
そうすると、今、次のようになるはずです。



次に進む前に、念のための注意をしておきましょう。「関数の表」を見ながら、座標平面に点を打ちましたね。今、全部で7個の点が打ってあるはずです。どうして7個なのかというと、それはもちろん、 x の値を7個用意して表を作ったからです。つまり x がそれぞれ -3 、 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 、 3 のときに y がいくつになるか調べたからです。でも本当は、もっともっと詳しく調べたいのですよね。もっときざみを詳しくして調べたり、もっと広い範囲を調べたいのですよね。そして、もっともっと詳しく調べていけば、点は7個打たれるだけではなくて、もっともっとたくさん点が打たれていたはずです。たく

さん点が打たれば打たれるほど本当のことがわかってきます。つまり、本当のことを知りたければ、もっともっと詳しい調査が必要なのです。しかし人間には限界があります。ある程度のところでがまんするしかありません。ですから、「もっと詳しく調べたら、さらに、どこに点が打たれるのか想像する」のです。関数を表す式「 $y = 2x - 1$ 」や、さっき作った「関数の表」と相談しながら想像するのです。そして、想像ができれば、7個の点の間を本当らしく結ぶのです。

このようにして、最後に、打たれた点たちの間を、「本当らしく」結ぶと、「関数のグラフ」は完成です。そうすると、「関数 $y = 2x - 1$ のグラフ」は次のようになります。



関数 $y = 2x - 1$ のグラフは、まっすぐな線になりました。また右上や、左下へ果てしなく伸びていきます。つまり、関数 $y = 2x - 1$ のグラフは「直線」になるのです。

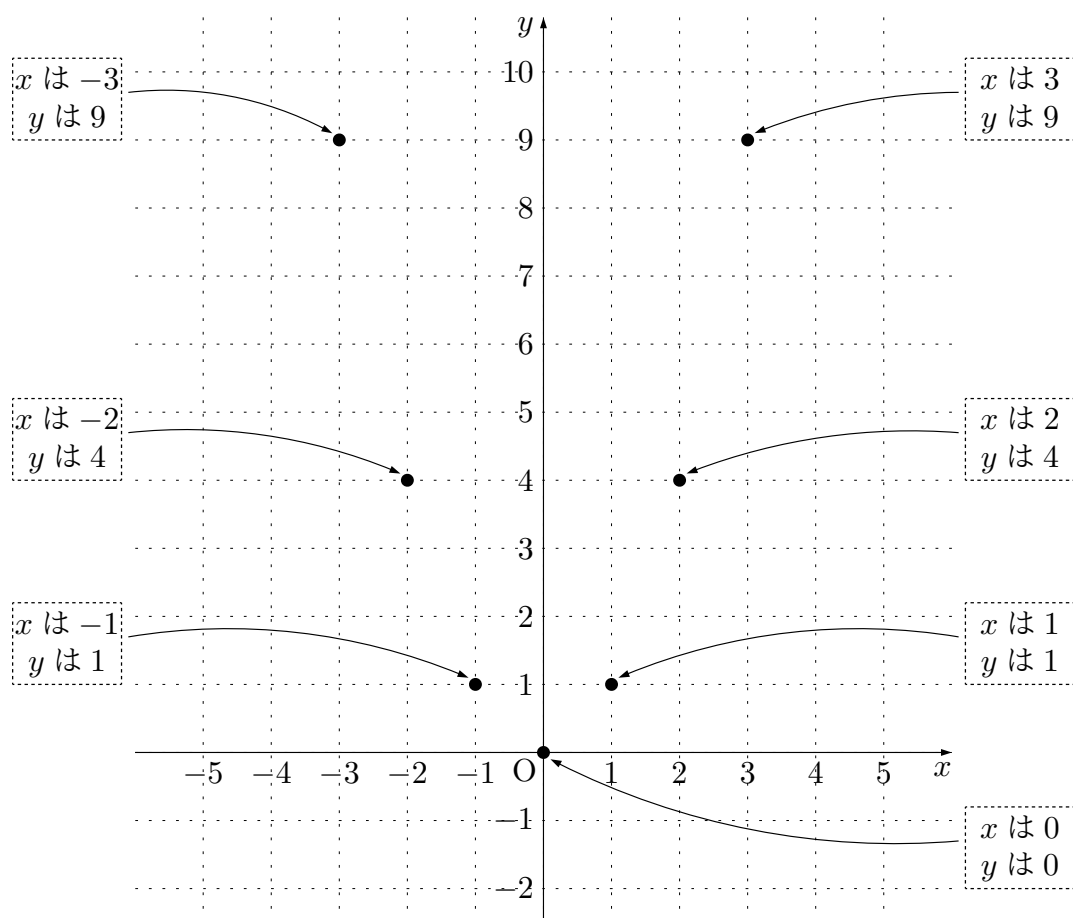
例 11 関数 $y = x^2$ のグラフを作ってみます。

まず、準備として、この関数 $y = x^2$ の表を作ります。調べる x の範囲ですが、ここでは、「 x は -3 ぐらいから、 3 ぐらいまで」にしておきましょう。また、どれぐらい細かく調査するのかということですが、まあここでは「 1 きざみ」で調査をすることにしましょう。（本当は、調べる範囲はできるだけ広いほうが良いのです。また調べる細かさ、つまりきざみもできるだけ細かいほうが良いのです。とは言っても人間には限界があります。ですから、ためしにこのぐらいの範囲と細かさで調べてみるのです。それで困ったことが出てきたら、また後で調査を詳しくするのです。）すると、次のような表ができるはずです。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

念のための注意をしておきましょう。この表の中には... が書いてあるところがあります。例えば、 x の段の 3 の右です。さっきも言ったように、本当はできるだけ範囲を広くして調査したいのです。しかし、「キリがない」ので「がまんしている」のです。本当は x が 4 の所とか 5 の所とか 6 の所... も調べたいのです。ですから、この表は、「本当は 3 より先もあるんだけどね」という気持ちを込めて... が書いてあるのです。ほかにも... が書いてあるところがありますが、どれも同じような気持ちなのです。

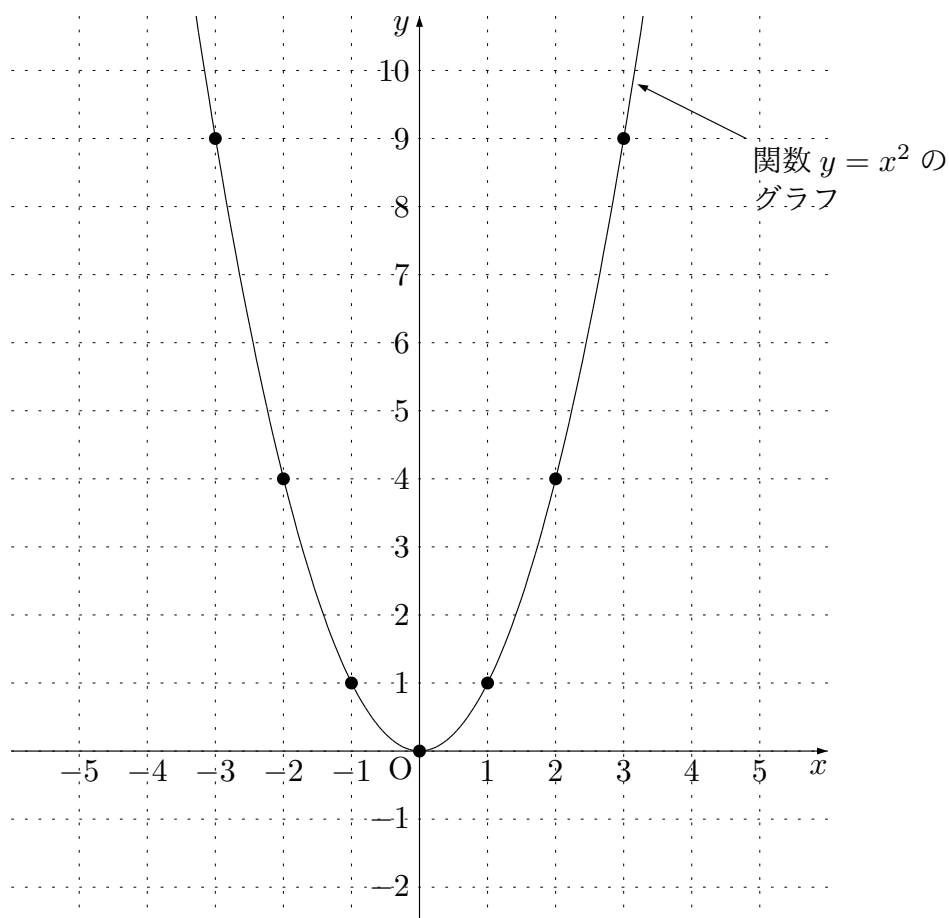
では次へ進みましょう。次は、この表を見ながら 座標平面に点を打ちます。どのように点を打つか、前の例 10 で詳しく説明したので、もういちいち説明しません。この「関数の表」を見て点を打つと、次のようになるはずです。



このように、「関数の表」を見ながら座標平面の上に点が打てたら、最後に、点たちの間を「本当らしく」結ぶのですね。でも今の場合、ちょっと悩めますね。前の例 10 では、点たちは、どうもまっすぐに並んでいるようでしたね。（前の例、見直してみてくださいね。）また、前の例では、表の y の段に並んでいる数を見ても、まっすぐに結んでよいような気配がありありでした。そしてもっともっと細かい調査をすれば、打った点の間に、ほかの点たちがまっすぐ、ずらりとたくさん出てくるように思われました。ですが、この例の関数はどうでしょう。さっき打った点を見ても、表の y の段に並んでいる数を見ても、まっすぐ並んでいるようには思えないですね。点と点の間をまっすぐ結ぶのは気が引けますよね。どうしたらよいのでしょうか。

このようなとき本当のことを知りたければ、詳しい調査をするしかないのです。つまり、 x の値を 1 きざみで変えて調べているだけではなく、0.5 きざみで変えて調べるとか、

もっとがんばって 0.1 きざみで変えて調べるとかしないといけないのです。そうやって、打つ点をたくさん調べるのです。そうすれば、さっき打った点たちの間をどうやって結べばよいか、だんだんわかってくるのです。ですからあなた、がんばって調べてください。そうすると、 $y = x^2$ のグラフは、次のようになるということがわかるでしょう。



このように、点と点の間をなめらかに結ぶのがコツです。（無理にまっすぐ結ぶと「とがった所」や「折れ曲がった所」ができてしまいます。）関数のグラフには、このように、曲がっているものもあるのです。

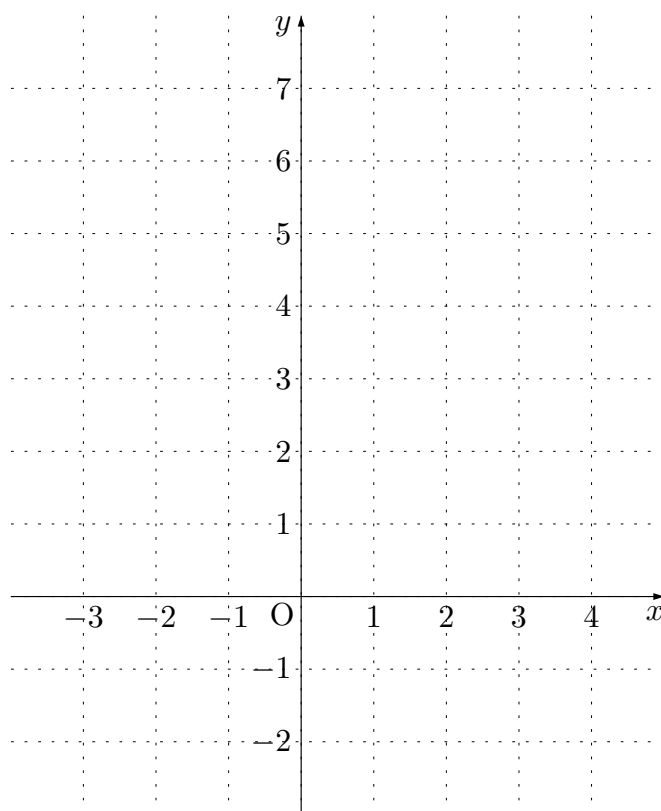
さて、二つの例を使って、関数のグラフの作り方を学びました。それでは今度は、あなたに関数のグラフを作ってもらうことにしましょう。

問 20. 関数 $y = -x + 3$ のグラフをこれから作ります。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y = -x + 3$ の表を作ります。ここでは、 x の範囲を -3 から 4 までにして、 x の値を 1 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



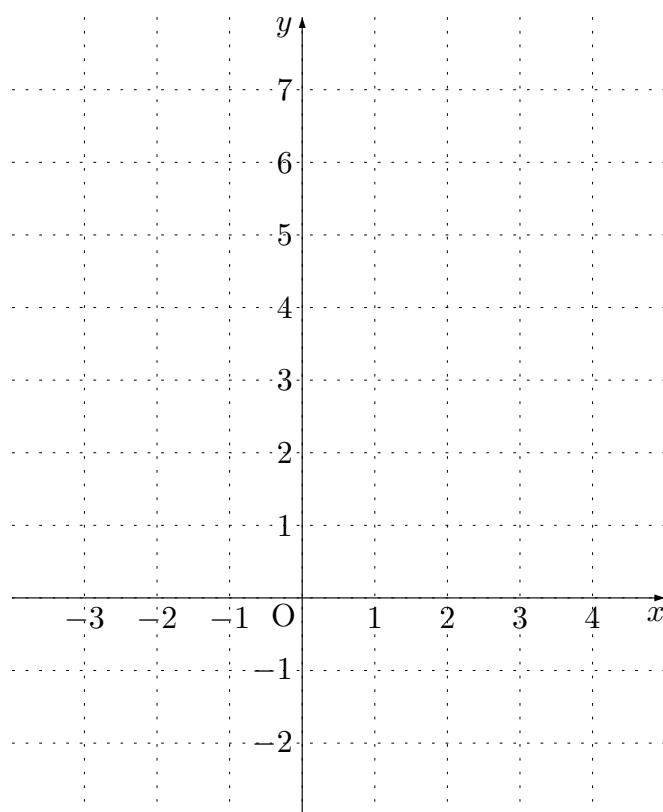
点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、上の座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y = -x + 3$ のグラフを完成してください。 [答えを見る](#)

問 21. 前の問 20 と同じ関数 $y = -x + 3$ のグラフを、前より気合を入れてこれから作ります。つまり、きざみを細かくして調査をしてから、グラフを作ることになります。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y = -x + 3$ の表を作ります。ここでは、 x の範囲を -3 から 4 までにして、 x の値を 0.5 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	...	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
y

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、この座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y = -x + 3$ のグラフを完成してください。（前の問 20 を解いたときより「きざみを細かくして」考えたので、打った点の数は前より増えています。ですから前より自信を持って、点たちの間を結べますね。）

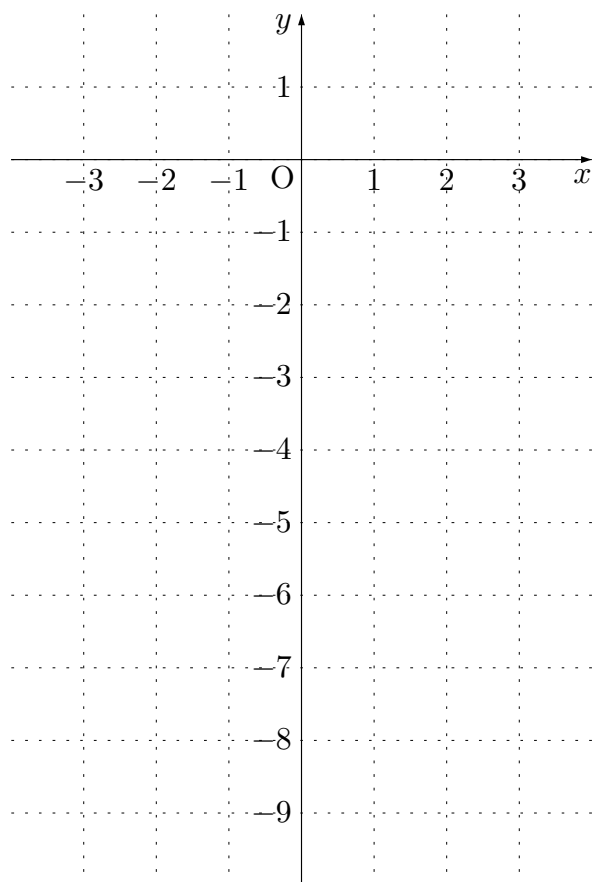
答えを見る

問 22. 関数 $y = -x^2$ のグラフをこれから作ります。次の指示に従って、順番に作っていくことにします。

まず、関数 $y = -x^2$ の表を作ります。ここでは、 x の範囲を -3 から 3 までにして、 x の値を 1 きざみで変えて調べることにします。すると、次のような表ができます。表の空欄に数を記入してください。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y

次は、今作った表をよく見て、座標平面の上に点を打つのですよね。では、次の座標平面の上に点を打ってください。



点が打てたら、最後に点たちの間を本当らしく結ぶのですね。では、この座標平面で、点たちの間を本当らしく結んで、関数 $y = -x^2$ のグラフを完成してください。

[答えを見る](#)

問 23. 次の関数のグラフを作りなさい。

(1) 関数 $y = x + 2$

(2) 関数 $y = -x + 1$

(3) 関数 $y = 2x - 5$

(4) 関数 $y = -3x + 1$

(5) 関数 $y = -x^2$

(6) 関数 $y = 2x^2$

(7) 関数 $y = \frac{1}{x}$

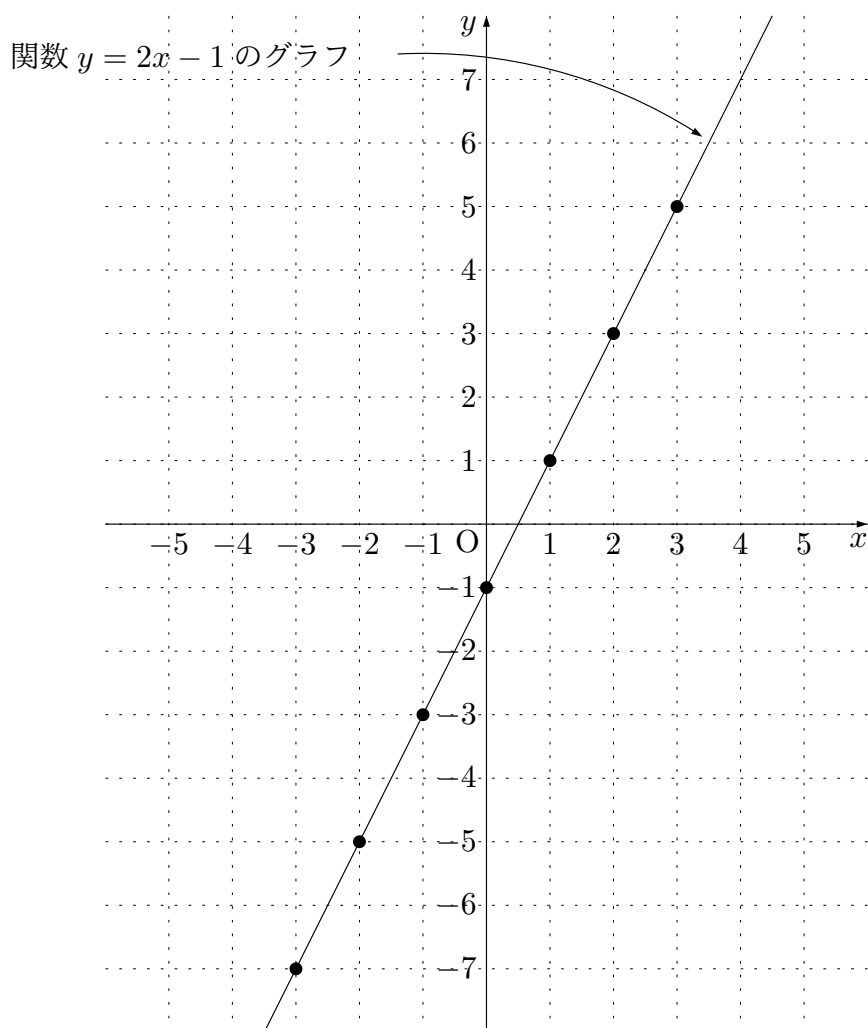
(8) 関数 $y = -\frac{1}{x}$

[答えを見る](#)

1.4.3 関数のグラフを見ると、変化の様子が良くわかる

さて、ここまで、「関数のグラフ」の作り方を学んできました。ところで何のために「関数のグラフ」を作るのでしたっけ？たしか、「関数のグラフ」をつくると、関数の変化の様子がよくわかるからでしたね。では、これから色々な「関数のグラフ」を見て、変化の様子が読み取れるのかどうか考えてみることにしましょう。

例 12 例 10 で関数 $y = 2x - 1$ のグラフを描きました。そこで、「関数 $y = 2x - 1$ のグラフ」と、グラフを作るために作った「関数 $y = 2x - 1$ の表」をもう 1 度見てみることにしましょう。たしか、次のようになっていましたね。

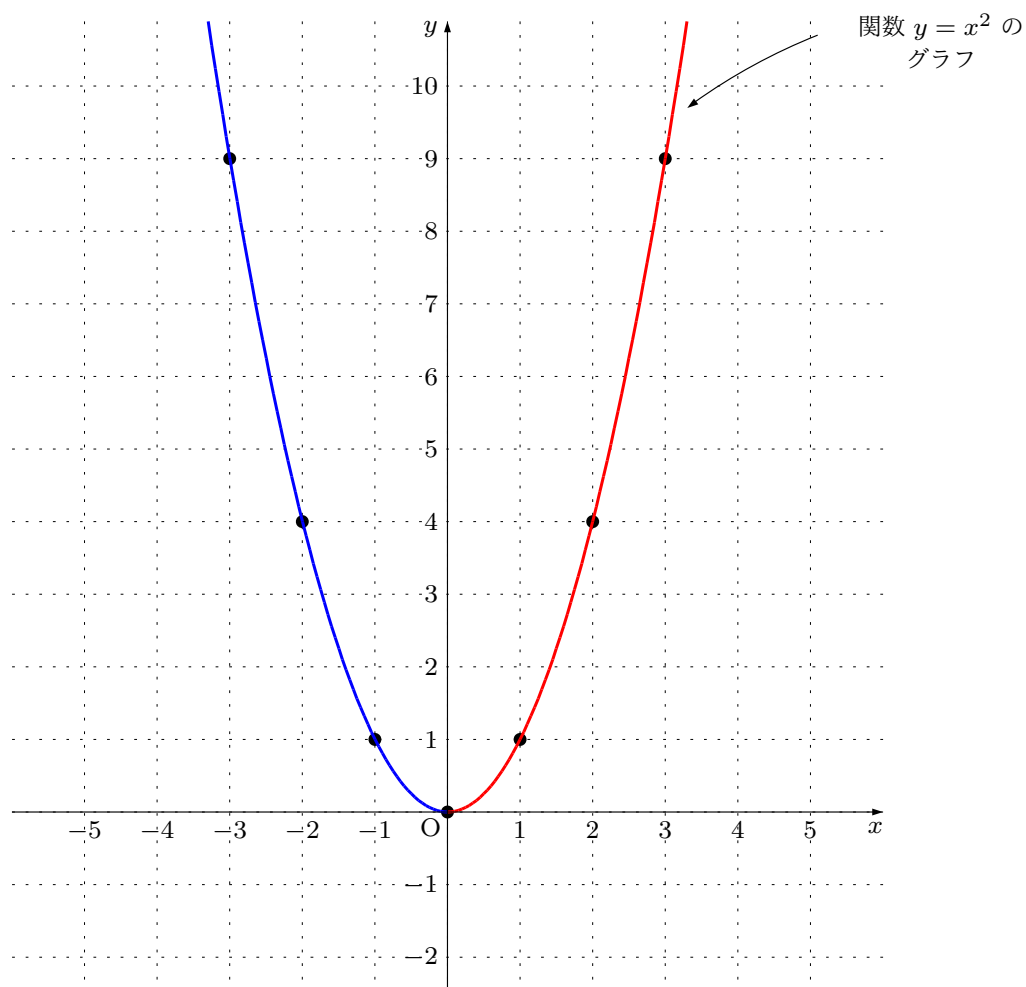


関数 $y = 2x - 1$ の表

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-7	-5	-3	-1	1	3	5	...

「グラフ」と「表」を両方見てください。「グラフ」は、全体的に右上がりです。また、「表」を見ると、 x が -3、-2、-1、1、... と 増えていくにつれて、 y も -7、-5、-3、-1、... と 増えていくことがわかります。つまり、関数のグラフが右上がりになるということは、 x が増えると y も増えるということを意味しているのです。

例 13 例 11 で関数 $y = x^2$ のグラフを描きました。そこで、「関数 $y = x^2$ のグラフ」と、グラフを作るために作った「関数 $y = x^2$ の表」をもう 1 度見てみることにしましょう。たしか、次のようになっていましたね。

関数 $y = x^2$ の表

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

大切なことを説明するために、関数 $y = x^2$ のグラフに色を付けておきました。このグラフでは、 x が 0 以下の所を青く描き、 x が 0 以上の所を赤く描きました。

ではまず、「グラフの青い部分」と「表」を見てください。青く描いたところ、つまり、 x が 0 以下の所ではグラフは右下がりになっています。また、「関数の表」では、 x が 0 以下の所だけを見ると、 x が -3、-2、-1、0 と増えるにつれて、 y は 9、4、1、0 と減っていくことがわかります。つまり、関数のグラフが右下がりになるということは、 x が増えると y は減るということを意味しているのです。

では次に、「グラフの赤い部分」と「表」を見てください。赤く描いたところ、つまり、 x が 0 以上の所ではグラフは右上がりになっています。また、「関数の表」では、 x が 0 以上の所だけを見ると、 x が 0、-1、2、3 と増えるにつれて、 y は 0、1、4、9 と増えていくことがわかります。つまり、関数のグラフが右上がりになるということは、 x が増えると y は増えるということを意味しているのです。

2 つの例で、関数のグラフの形と、関数の変化の仕方には関係があるということを見てきました。座標平面の上では、「 x が増える」というのは、「右へ行く」ということです。また、「 y が増える」というのは、「上へ行く」ということです。ですから、 x が増えるにつれて y も増えれば、右上へ行くことになるので、グラフは右上がりになるのです。一方、 x が増えるにつれて y が減れば、右下へ行くことになるので、グラフは右下がりになるのです。このようなものの見方はとても大切です。重要な事実として、まとめておくことにします。

— 重要な事実：関数の増え方減り方はグラフから読み取れる —

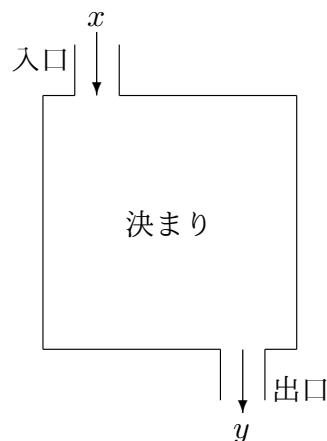
- (1) 関数のグラフが右上がりになっている所では、 x が増えると y も増えていきます。
- (2) 関数のグラフが右下がりになっている所では、 x が増えると y は減っていきます。

さて、ここまでの学習で、関数についての一般的な話は終わりです。そこでこれから、色々な関数を種類に分けて学ぶことにします。

1.5 中学校で学ぶ関数の種類

関数とひとことで言っても色々なものがあります。そして、それぞれの関数にはそれぞれの特徴があります。

関数とは、右の図のような箱の中の「決まり」のことでした。入口から何か数を入れると、「決まり」に従って数が作られ、出口から出てくるのです。もちろん「決まり」には色々なものがあるわけです。そこで、「決まり」をいくつかの種類に分けて考えるのです。そしてそれぞれの関数の特徴を調べていくのです。中学校では次の4種類の関数を学びます。



- 「入口から入れた数をナントカ倍して出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「比例」と呼びます。
- 「ある数を入口から入れた数でわって出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「反比例」と呼びます。
- 「入口から入れた数をナントカ倍してさらにある数をたして出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「1次関数」と呼びます。
- 「入口から入れた数を2乗してさらにナントカ倍して出口から出す」という「決まり」の関数。このような関数を「 x の2乗に比例する関数」と呼びます。

中学校ではこの4種類の関数を順番に学ぶことになっていますが、関数1のテキストでは「比例」と「反比例」を学び、関数2のテキストでは「1次関数」について学びました。このテキストではこれから「 x の2乗に比例する関数」について学びます。

第2章

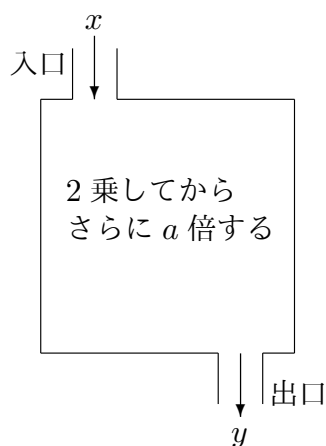
x の2乗に比例する関数

2.1 そもそも x の2乗に比例する関数ってなに？

まず、ある1つの数を決めます。ただし、0とは違う数にしないといけません。今、この数を a という文字で表しておきましょう。

ここで、次のような「決まり」を考えることにします。

「決まり」：入口から入れた数を2乗してからさらに a 倍して出口から出す。



この「決まり」のことを x の2乗に比例する関数と呼んでいます。

例 14 「入口から入れた数を2乗してからさらに1をかけて出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の仲間です。この関数では、入口から2を入れる

と、出口から4が出てきます。また、入口から -4 を入れると、出口から16が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から x^2 が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = x^2$$

となります。

例15 「入口から入れた数を2乗してからさらに3をかけて出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の仲間です。この関数では、入口から2を入れると、出口から12が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から18が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $3x^2$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = 3x^2$$

となります。

例16 「入口から入れた数を2乗してからさらに -3 をかけて出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の仲間です。この関数では、入口から2を入れると、出口から -12 が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から -18 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $-3x^2$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = -3x^2$$

となります。

例17 「入口から入れた数を2乗してからさらに $-\frac{1}{2}$ をかけて出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の仲間です。この関数では、入口から2を入れると、出口から -2 が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から $-\frac{9}{2}$ が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から $-\frac{1}{2}x^2$ が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

となります。これは、もちろん、

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

と書いても同じことです。

例 18 「入口から入れた数を 2 乗してからさらに 0 をかけて出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の仲間ではありません。この関数では、入口から 2 を入れると、出口から 0 が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から 0 が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から 0 が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = 0$$

となります。

問 24. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を 2 乗してからさらに 2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から が出てきます。また、入口から -7 を入れると、出口から が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

となります。

答えを見る

問 25. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を 2 乗してからさらに -2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

となります。

答えを見る

問 26. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

「入口から入れた数を2乗してからさらに $\frac{3}{2}$ 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の です。この関数では、入口から1を入れると、出口から が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

となります。

答えを見る

問 27. 次の文の空欄に、正しい数、式、言葉を書きなさい。

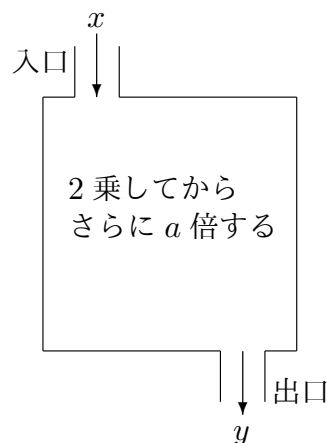
「入口から入れた数を2乗してからさらに -1 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の2乗に比例する関数の です。この関数では、入口から3を入れると、出口から が出てきます。また、入口から -5 を入れると、出口から が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

となります。

答えを見る

問 28. 右の図を見てください。いくつとは言いませんが、 a は、ある決まった数とします。ただし a は0とは違う数とします。この図のように、 x の2乗に比例する関数とは、「入口から入れた数を2乗してからさらに a 倍して出口から出す」という「決まり」の関数でしたね。

この関数を数式で表してください。



答えを見る

それではここで、まとめをしておきましょう。

— そもそも x の 2 乗に比例する関数とは、どんな関数のこと？ —

- (1) ある 1 つの数 a を決めておきます。ただし a は 0 とは違う数とします。そして、「入口から入れたを 2 乗してからさらに a 倍して出口から出す」という「決まり」を考えることにします。このような「決まり」の関数を「 x の 2 乗に比例する関数」と呼んでいます。
- (2) ある 1 つの数 a を決めておきます。ただし a は 0 とは違う数とします。そして、 $y = ax^2$ という数式で表される「決まり」を考えます。このような「決まり」の関数を「 x の 2 乗に比例する関数」と呼んでいます。

問 29. 次の関数を「比例」、「反比例」、「一次関数」、「 x の 2 乗に比例する関数」に分けてください。

① $y = \frac{2}{x}$

② $y = -3x + 1$

③ $y = \frac{x}{4}$

④ $y = \frac{x}{4} + 2$

⑤ $y = -2x^2$

⑥ $y = \frac{x^2}{3}$

⑦ $y = -\frac{3}{x}$

⑧ $y = -\frac{1}{3}x^2$

⑨ $y = -x$

⑩ $y = 6x - 5$

⑪ $y = \frac{1}{4}x^2$

⑫ $y = \frac{6}{x}$

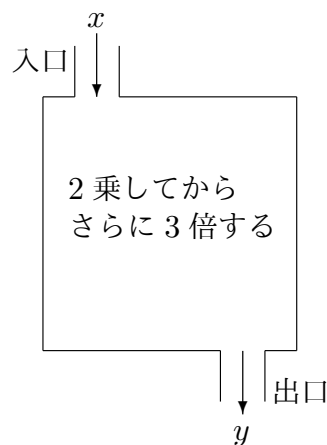
答えを見る

2.2 x の 2 乗に比例する関数の性質

x の 2 乗に比例する関数とは、0 とは違う数 a を使って $y = ax$ という数式で表される関数であることを学びました。というわけで次は、「じゃあ、この関数にはどんな性質があるのかな？」ということ調べることにします。実は x の 2 乗に比例する関数には面白い性質があります。そのことを「 $y = 3x^2$ 」という式であらわされる関数を使って調べてみることにします。

右の図を見てください。これは関数 $y = 3x^2$ の決まりを図にしたものですね。この図を見ながら調査をしていくことにします。

今2人の人、A君とB君がいるとします。この2人は「関数 $y = 3x^2$ の決まりの図」の箱の「入口」からいろいろな数を入れていきます。ただし、いつもB君の入る数はA君の入る数の2倍になっているとします。



ですから、例えばA君が入口から $x = 3$ を入れると B君は入口から $x = 6$ を入れます。

また例えば、A君が入口から $x = -7$ を入れると B君は入口から $x = -14$ を入れます。このようなことをすると、出口から出てくる数 y は、A君とB君ではどのような違いが出るのでしょうか。このことを調べるために、以下の問を考えてください。

問 30. $y = 3x^2$ という式であらわされる関数について以下の問に答えなさい。

- (1) A君が入口から $x = 3$ を入れると B君は入口から $x = 6$ を入れますよね。ではこのとき、出口から出てくる数はA君はいくつで、B君はいくつになりますか。
- (2) A君が入口から $x = -7$ を入れると B君は入口から $x = -14$ を入れますよね。ではこのとき、出口から出てくる数はA君はいくつで、B君はいくつになりますか。
- (3) A君が入口から $x = 5$ を入れると B君は入口から $x = 10$ を入れますよね。ではこのとき、出口から出てくる数はA君はいくつで、B君はいくつになりますか。
- (4) A君が入口から $x = -4$ を入れると B君は入口からいくつを入れますか。またこのとき、出口から出てくる数はA君はいくつで、B君はいくつになりますか。
- (5) A君が入口から $x = -\frac{3}{2}$ を入れると B君は入口からいくつを入れますか。またこのとき、出口から出てくる数はA君はいくつで、B君はいくつになりますか。
- (6) 次の表に、(1) から (5) の調査結果をまとめなさい。

--- 関数 $y = 3x^2$ でいつも B 君が A 君の 2 倍の数を入力から入れると ... ---

(1)

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = 3$	$x = 6$	➡	$y =$	$y =$

(2)

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = -7$	$x = -14$	➡	$y =$	$y =$

(3)

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = 5$	$x =$	➡	$y =$	$y =$

(4)

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = -4$	$x =$	➡	$y =$	$y =$

(5)

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = -\frac{3}{2}$	$x =$	➡	$y =$	$y =$

(7) ここまでの調査結果をよく見て教えてください。あなたは、「出口から出てくる y

の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？

答えを見る

さて、この問、全部ちゃんとできましたか？念のため、(7) の答えを書いておきます。

「関数 $y = 3x^2$ の場合、いつも B 君は A 君の 2 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる数は、いつも B 君は A 君の 4 倍になっている」のですね。

それでは今度は、「いつも 2 倍」ではなくて、「いつも B 君は A 君の 3 倍の数を入口から入れる」とか、「いつも B 君は A 君の 4 倍の数を入口から入れる」とか、「いつも B 君は A 君の 5 倍の数を入口から入れる」… とする場合はどうでしょうか。出口から出てくる数は、A 君と B 君ではどのように違うのでしょうか。このことを考えるために、次の問を考えてください。

問 31. 関数 $y = 3x^2$ で、「いつも B 君は A 君の 3 倍の数を入口から入れる」ことにします。以下の問に答えなさい。

- (1) あなたが A 君と B 君になったつもりで、入口から入れる数を 5 パターン考えてください。そして次の表を完成してください。

関数 $y = 3x^2$ でいつも B 君が A 君の 3 倍の数を入口から入れると …

①

入口から入れる x の値		→	出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x =$	$x =$		$y =$	$y =$

②

入口から入れる x の値		→	出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x =$	$x =$		$y =$	$y =$

③

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x =$	$x =$	→	$y =$	$y =$

④

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x =$	$x =$	→	$y =$	$y =$

⑤

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x =$	$x =$	→	$y =$	$y =$

(2) あなたが (1) で完成した表もよく見て教えてください。

関数 $y = 3x^2$ では、いつも B 君が A 君の 3 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？

答えを見る

問 32. 関数 $y = 3x^2$ について以下の問に答えなさい。

- (1) いつも B 君が A 君の 4 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問 31 のような表を作って調べてください。
- (2) いつも B 君が A 君の 5 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問 31 のような表を作って調べてください。
- (3) いつも B 君が A 君の n 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A

君とB君ではいつもどのように違っていると思いますか？

答えを見る

ここまでは、 $y = 3x^2$ という関数を使ってひたすら調査をしてきました。でも、 $y = -3x^2$ のほかにもいろいろ「 x の2乗に比例する関数」がありますね。そこで今度は、使う関数を $y = -2x^2$ に変えて調べようと思います。以下の問に答えてください。

問 33. 関数 $y = -2x^2$ について以下の問に答えなさい。

- (1) いつもB君がA君の2倍の数を入力から入れると、出口から出てくる y の値はA君とB君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問のような表を作って調べてください。
- (2) いつもB君がA君の-3倍の数を入力から入れると、出口から出てくる y の値はA君とB君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分で問1のような表を作って調べてください。
- (3) いつもB君がA君の n 倍の数を入力から入れると、出口から出てくる y の値はA君とB君ではいつもどのように違っていると思いますか？

答えを見る

この問の前にも言ったように、 $y = 3x^2$ や $y = -2x^2$ の他にも「 x の2乗に比例する関数」はいくらでもあります。ですから本当は、これまでのような調査をしなくてはいけないのですがあなたにまかせることにします。ちゃんと調査しておいてくださいね。

では、自分でちゃんと調査した人は次の問を考えることにしましょう。

問 34. 次の文はこれまで調査してきたことをまとめたものです。空欄に正しい数を記入しなさい。

x の2乗に比例する関数の性質

関数 $y = ax^2$ では、入口から入れる数 x を2倍、3倍、4倍、5倍…としていくと、出口から出てくる数 y は 倍、 倍、 倍、 倍… となっていくます。

また、入口から入れる数 x を-2倍、-3倍、-4倍、-5倍…としていくと、出

口から出てくる数 y は 倍、 倍、 倍、 倍 ... となっていきます。
つまり、関数 $y = ax^2$ では、入口から入れる数 x を n 倍にすると、出口から出てくる数 y は 倍になります。

[答えを見る](#)

2.3 x の 2 乗に比例する関数のグラフとその特徴

関数のグラフの作り方については第 1 章の中の 49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」で詳しくおさらいしました。念のため、簡単に思い出しておくことにします。

- 関数のグラフの作り方 -

まず、入口から入れる x の値を適切にたくさん用意し、それらの値に対して出口から出てくる y の値を計算して表にまとめておきます。次に、表を見ながら座標平面に点を打っていきます。点を打ち終わったら点と点の間を「本当らしく」結びます。

このようにして関数のグラフを作ることができるのでしたね。(何を言っているのかわからなかった人はこのまま先を読むと大変です。今すぐ、49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」を復習してください。)

では、関数のグラフの作り方が理解できている人は本題に入ることにしましょう。

ここではこれから、「 x の 2 乗に比例する関数のグラフ」、つまり「関数 $y = ax^2$ のグラフ」を作っていきます。「関数 $y = ax^2$ のグラフ」といってもいろいろとあるわけですが、そうですねえ、まず一番シンプルな、 $y = x^2$ のグラフから研究してみることにしましょう。(つまり、 $a = 1$ の場合の「関数 $y = ax^2$ のグラフ」を研究してみるのです。) そのた

めに、次の問を考えてください。

問 35. 49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」で学んだやり方で関数 $y = x^2$ のグラフを作ろうと思います。次の手順に従ってグラフを作ってください。

手順1 次の表を完成しなさい。

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y

手順2 ノートまたは方眼紙を用意しなさい。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りなさい。

手順3 手順1 で作った表をよく見て調べた点を全て座標平面の上に打ちなさい。

手順4 点と点の間を「本当らしく」結んで、関数 $y = x^2$ のグラフを完成しなさい。

答えを見る

どうでしたか？この問 35 ですが、ちゃんとできましたか？気にしてほしいことを説明することにします。

まず、グラフを作るために、手順1 で関数 $y = x^2$ の表を作ったはずですが、計算を間違わなかった人は次のような表ができたはずです。

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	...

どうですか？あなたの作った表と同じでしたか？

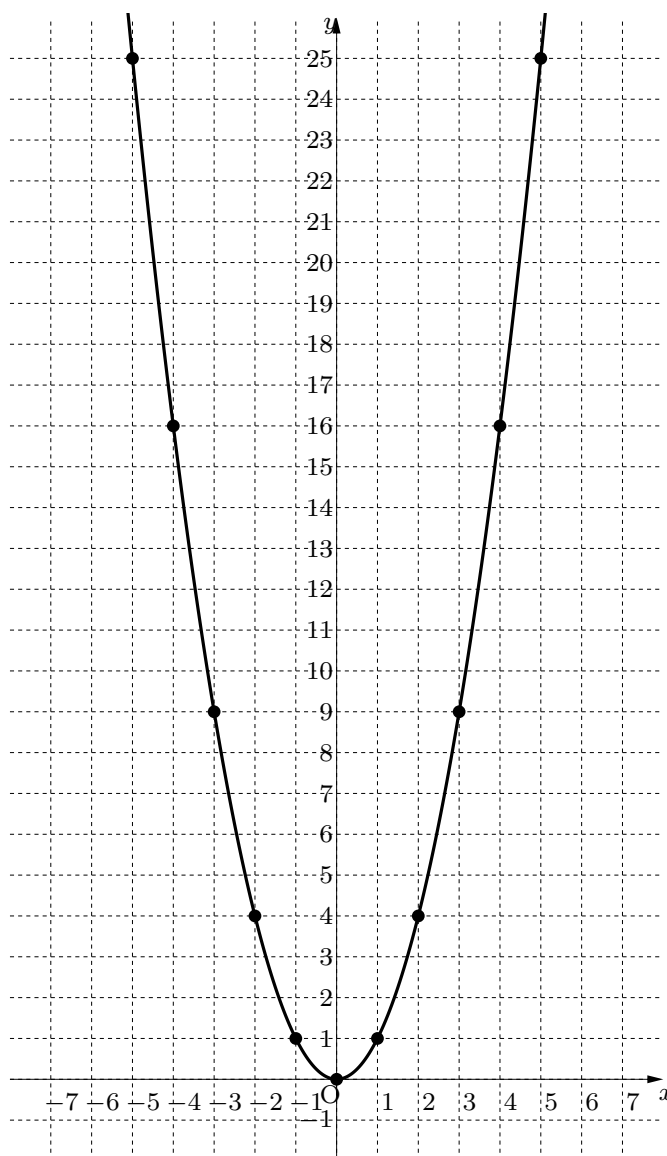
さらに手順 2、手順 3、手順 4 と進むとグラフができていくわけですが、ちゃんと $y = x^2$ のグラフはできましたか？ちゃんとグラフを作った人は、右の図のようになったと思います。

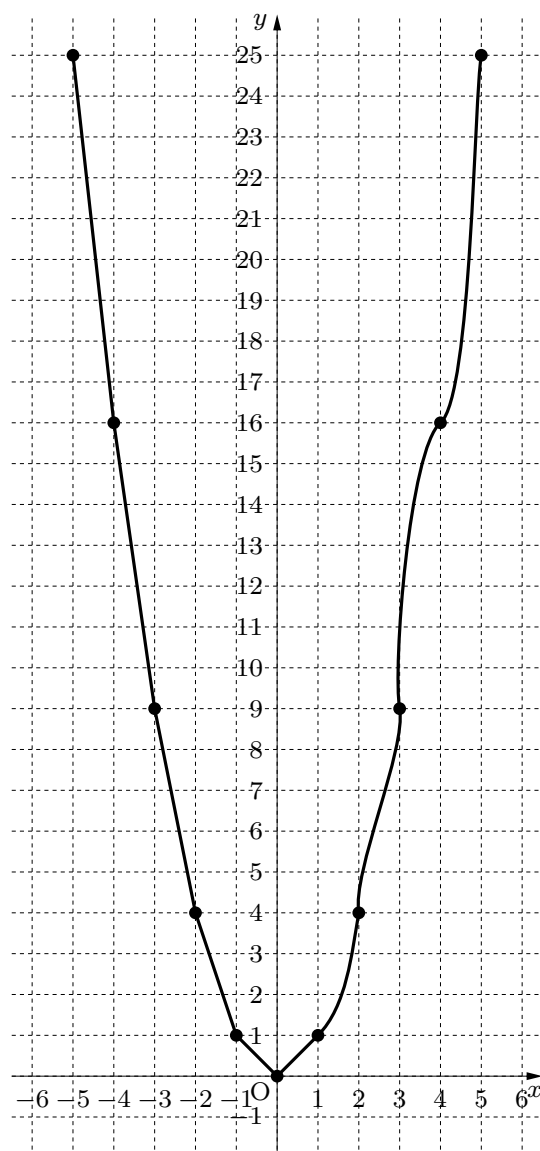
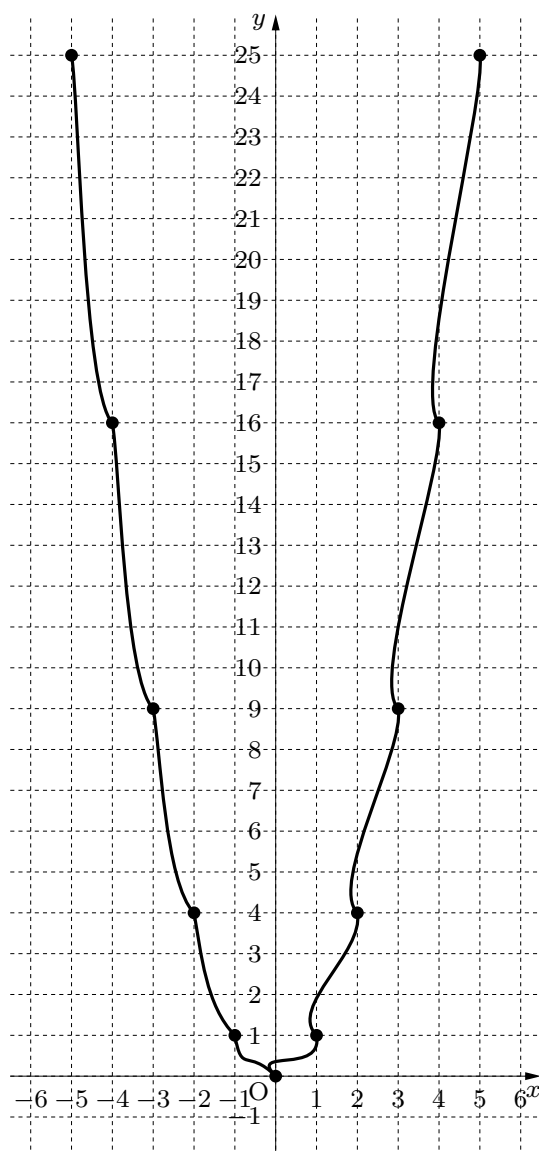
でも、グラフを作るときに難しい所はありませんでしたか？きっと、「点と点の間を本当らしく結んでいく」というところが難しかったのではないのでしょうか。もっと言うと、「本当らしく」なんていいながら、結局「自分の思うとおりに結んだだけ」なので、「あまり正確にグラフは作れなかったかも」って不安になったりしませんでしたか？

もしあなたがそのように感じているのなら、あなたはとてもまともな人です。そういう人は、数学の学習に向いている人なのです。

よく考えてみれば、「点と点の間を本当らしく結ぶ」なんて言っていますが、どのように結ぶのが「本当」なのか簡単にわかるわけですね。結局、「本当らしく結ぶ」とか言っても自分の好きなように結んでいるだけですよね。だって、調べてもいないところを勝手に描いているわけですから。つまり、「本当」と、「本当らしく」は違うわけですね。

次の図を見てください。これはある 2 人の人が関数 $y = x^2$ のグラフを作ったものです。





どちらの人も、自分なりに点と点の間を「本当らしく」結んでグラフを完成させたわけです。さっき 77 ページで見たグラフと比べると、「カッコ悪い」と思う人もいるかもしれません。しかし、点と点の間がどうなっているのかは今の所わかりません。関数のグラフを描くために手順 1 で表を作りましたが、そのとき x の値を 1 きざみにして表を作ったからです。ですからどの人のグラフが良くてどの人のグラフが悪いのかということは今の所わからないのです。というわけで、本当のことを知りたければ x の値をもっと細かいきざみにして調査をし、座標平面の上に打つ点を増やすしかないのです。つまり、「1 きざみ」なんてケチなことは言わずに、例えば「0.1 きざみ」で調べればもっと真実に迫ることができるわけです。というわけで、これから x の値を 0.1 きざみにして表を作り直すことに

しますが、ここではために原点の周りのことを調べることにします。そこで、 x の値が -1 から 1 の所を 0.1 きざみにして調査をしてみます。次の問を考えてください。

問 36. 関数 $y = x^2$ のグラフの原点の周りの様子を詳しく調べようと思います。以下の手順に従って原点の周りのグラフを作っていくなさい。

手順 1 次の表を完成しなさい。

x	...	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
y	...											

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	...
												...

手順 2 ノートまたは方眼紙を用意しなさい。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りなさい。 $(x$ の値を 0.1 きざみにしたのでですから 1 目盛りを大きくしておいてください。)

手順 3 手順 1 で作った表をよく見て調べた点を全て座標平面の上に打ちなさい。

手順 4 点と点の間を「本当らしく」結んで、関数 $y = x^2$ のグラフを完成しなさい。

答えを見る

さて今、問 36 で原点のまわりだけ関数 $y = x^2$ のグラフを詳しく作ってもらいましたが上手に作れましたか？気にしてほしいことを説明します。

まず、グラフを作るために、手順 1 で関数 $y = x^2$ の表を作ったはずですが、計算を間違わなかった人は次のような表ができたはずです。

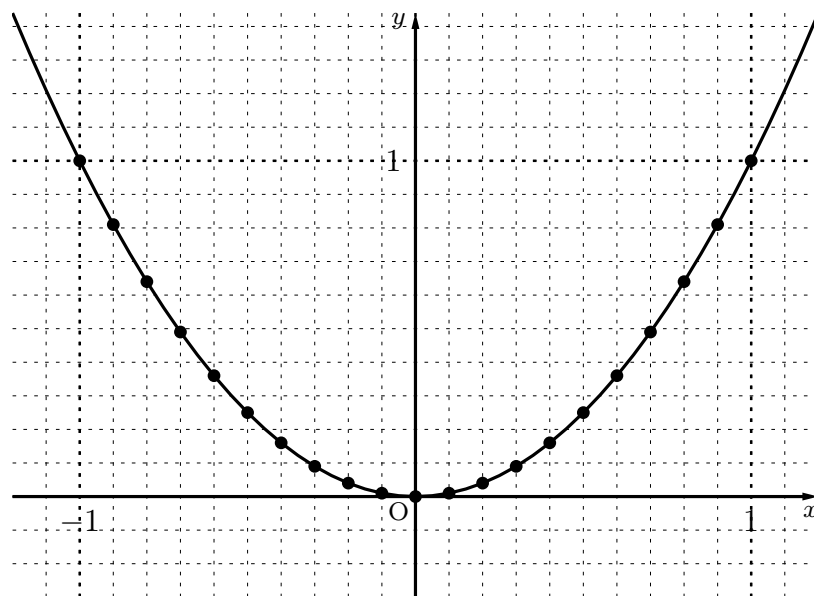
x	...	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
y	...	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	...
	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.49	0.64	0.81	1		...

どうですか？あなたの作った表と同じでしたか？

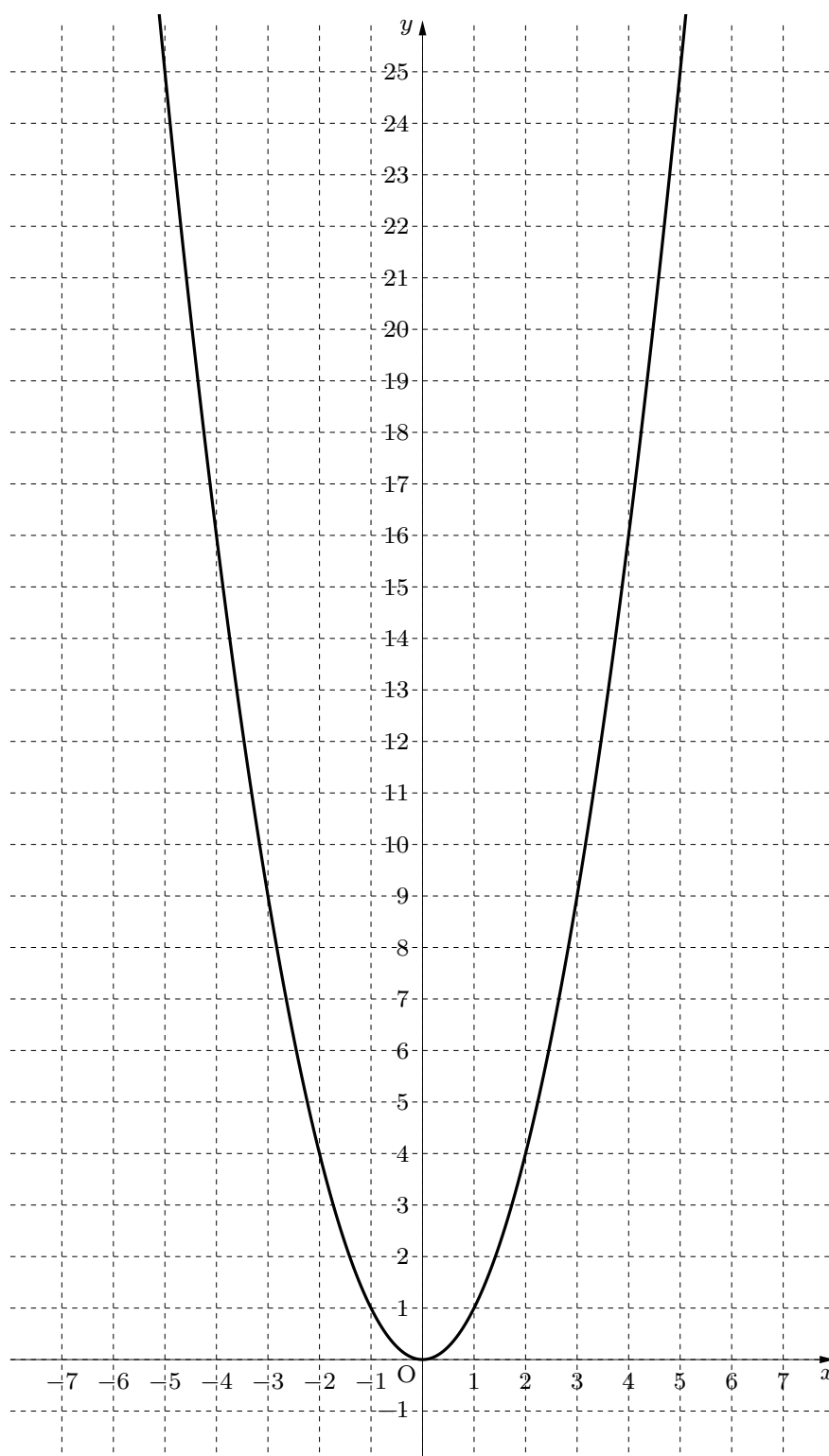
さらに手順 2、手順 3、手順 4 と進むとグラフができていくわけですが、ちゃんと $y = x^2$

のグラフはできましたか？ちゃんとグラフを作った人は、次のようになったと思います。



「細かく点がたくさん打てたけど、結局最後は、点と点の間を本当らしく結ぶんじゃないか。」というようにがっかりした人もいるかもしれませんね。でも、1 きざみで作ったグラフより 0.1 きざみで作ったグラフのほうが真実に迫っているのです。もっともっと真実に迫ってできるだけ正確な形のグラフを作りたければ、さらにきざみを細かくして 0.01 きざみで調べるとか、さらにもっときざみを細かくして 0.001 きざみで調べるとかすればよいのです。現在ではコンピュータが発達したおかげでそのような計算はあっという間にできるようになりました。

問 36 からここまで、原点のまわりだけ関数 $y = x^2$ のグラフを詳しく作ってもらった話をしてきましたが、原点の周りだけでなく、あらゆる場所をきざみを細かくして調べていけばどんどん正確な形のグラフが出来上がっていきます。そのようにすると、関数 $y = x^2$ のグラフは次のような形であることがはっきりしてくるのです。

とても正確に描かれた関数 $y = x^2$ のグラフ

さて、ここまでの学習で、「 x の 2 乗に比例する関数」（つまり $y = ax^2$ という式で表される関数）のうち最も基本になる「関数 $y = x^2$ 」のグラフの形を調べてきました。そこ

でこれから、関数 $y = x^2$ 以外の「 x の2乗に比例する関数」について、グラフの形を調べることにしましょう。いくつかのテーマを設けて調べていくことにします。

テーマ1 $y = 2x^2$ 、 $y = 3x^2$ 、 $y = 4x^2$ 、 $y = -x^2$ 、 $y = -2x^2$ 、 $y = -3x^2$ 、 $y = -4x^2 \dots$

などのグラフと、「 x の2乗に比例する関数」（つまり $y = ax^2$ という式で表される関数）のうち最も基本になる「関数 $y = x^2$ 」のグラフの間には何か関係があるでしょうか。

例19 「関数 $y = 2x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を比べることにします。そこでまず、グラフの作り方をあらためてここで思い出しておきます。たしか、

関数のグラフの作り方：まず、入口から入れる x の値を適切にたくさん用意し、それらの値に対して出口から出てくる y の値を計算して表にまとめておきます。次に、表を見ながら座標平面に点を打っていきます。点を打ち終わったら点と点の間を「本当らしく」結びます。

ということでしたね。

というわけで、まず「関数 $y = 2x^2$ 」と「基本となる関数 $y = x^2$ 」の表を作ってみましょう。 x の値を1きざみで変えて調べると、それぞれの関数の表は次のようになりますね。（あなたも自分で y の値を計算して確かめてください。）

関数 $y = 2x^2$ の表基本となる関数 $y = x^2$ の表

x	\dots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\dots	x	\dots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\dots
y	\dots	18	8	2	0	2	8	18	\dots	y	\dots	9	4	1	0	1	4	9	\dots

ではこの2つの表をよく見比べてください。次のようなことに気がつきませんか？

「2つの表で同じ x の値に対する y の値を比べてみると、必ず、関数 $y = 2x^2$ の表に書いてある y の値は基本となる関数 $y = x^2$ の表に書いてある y の値の2倍になっている。」

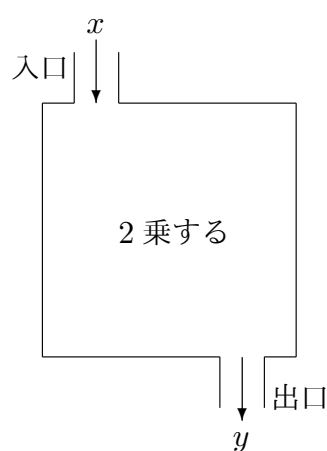
ということわかりましたか？

例えば、2つの表で x の値が -3 の所を見てみると、関数 $y = 2x^2$ の表に書いてある y

の値は 18 で、基本となる関数 $y = x^2$ の表に書いてある y の値は 9 です。そして 18 って 9 の 2 倍ですよ。さっき言ったことの意味わかりましたか？

x の値が -2 の所を見ても、やっぱりそうってますよね。8 と 4 なのですからちゃんと 2 倍になってますよね。

このようなことが、表のどこを見ても起きているわけです。でもどうしてこんなことがおきているのでしょうか。このことを考えるために次の図を見てください。

関数 $y = 2x^2$ の「決まり」の図関数 $y = x^2$ の「決まり」の図

この図を見てじっくり考えた人は、「入口から同じ x を入れると、出口から出てくる y の値は必ず、関数 $y = 2x^2$ では基本となる関数 $y = x^2$ の 2 倍になっている」ということが納得できると思います。「さらに 2 倍する」というところが効いているのです。

話を先に進めることにしましょう。グラフを描くための表ができたので、グラフを作ることになります。次は表を見ながら座標平面に点を打っていき、最後に点と点の間を「本当らしく」結ぶのでしたね。あなたのためにもう一度ここに表を書いておきます。たしか次のようになっていますね。

関数 $y = 2x^2$ の表

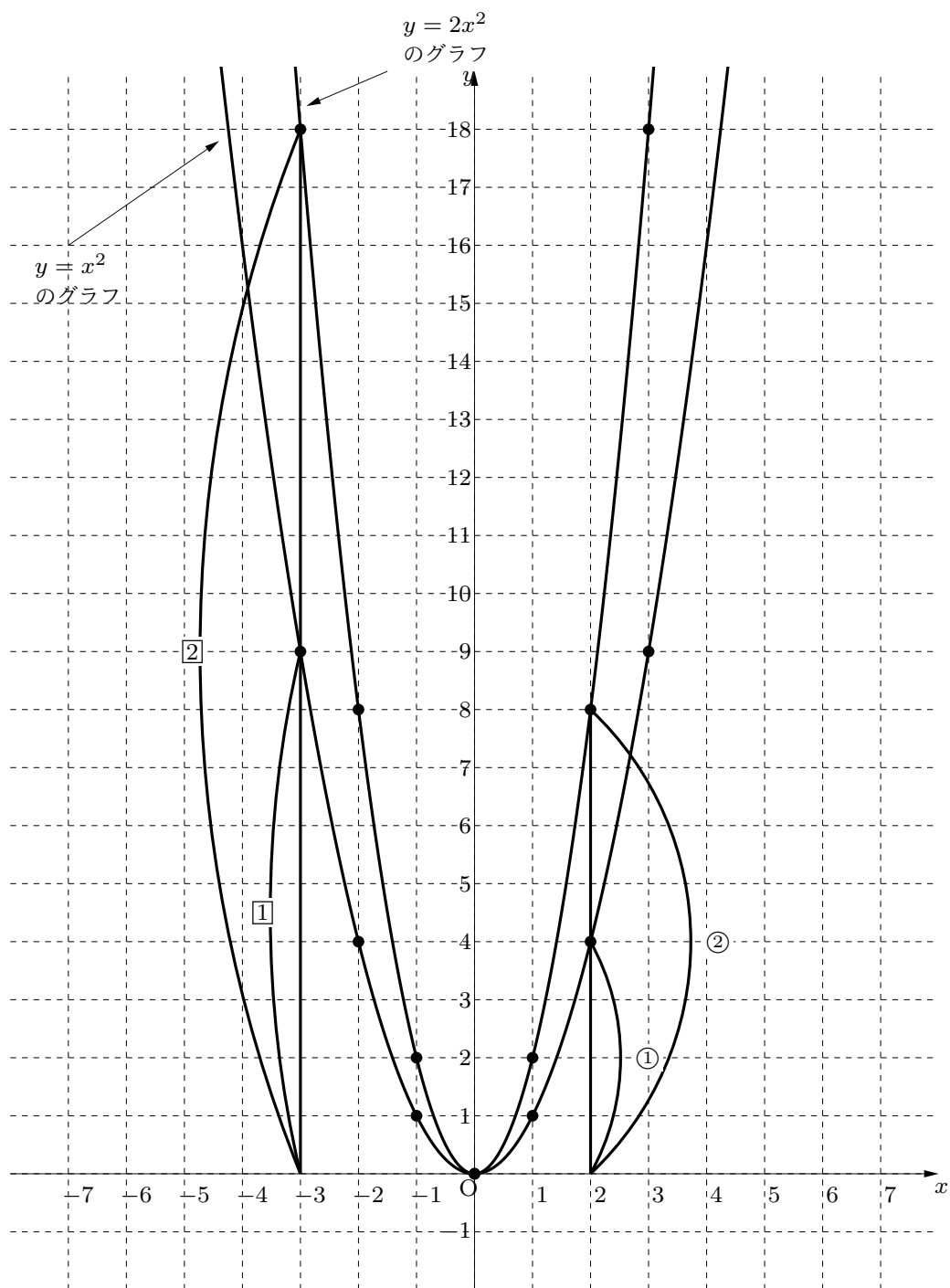
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	18	8	2	0	2	8	18	...

基本となる関数 $y = x^2$ の表

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

ではあなたも自分でノートや方眼紙を用意して、この 2 つの表を見ながら 2 つの関数の

グラフを作ってみてください。すると次のようになるはずです。次の図では2つの関数のグラフを比べるために、1つの座標平面に2つのグラフを描いてあります。



それでは最後に、「関数 $y = 2x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を比べてみてわかったことをまとめておきましょう。

- よく理解して欲しいこと -

「関数 $y = 2x^2$ のグラフ上の点」と「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」 x 軸からの高さを同じ x の値のところで比べてみます。すると必ず、「関数 $y = 2x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さは「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さの 2 倍になっています。これは、「関数 $y = 2x^2$ の決まり」は「基本となる関数 $y = x^2$ の決まり」に続いて「さらに 2 倍する」というようになっているからです。

このように、2 つの関数のグラフ上の点を同じ x の値のところで比べたときに、2 つの点の x 軸からの高さが、必ず、片方の関数のグラフ上の点はもう片方の関数のグラフ上の点の 2 倍になっているとき、「片方の関数のグラフはもう他方の関数のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものになっている」ということがあります。このような言い回しを使うと、「関数 $y = 2x^2$ のグラフは関数 $y = x^2$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したものになっている」と言うことになります。

例 20 「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を比べることにします。そこでまず、グラフの作り方をあらためてここで思い出しておきます。ただし、

関数のグラフの作り方：まず、入口から入れる x の値を適切にたくさん用意し、それらの値に対して出口から出てくる y の値を計算して表にまとめておきます。次に、表を見ながら座標平面に点を打っていきます。点を打ち終わったら点と点の間を「本当らしく」結びます。

ということでしたね。

というわけで、まず「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 」と「基本となる関数 $y = x^2$ 」の表を作ってみましょう。 x の値を1きざみで変えて調べると、それぞれの関数の表は次のようになりますね。(あなたも自分で y の値を計算して確かめてください。)

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	...

基本となる関数 $y = x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

ではこの2つの表をよく見比べてください。次のようなことに気がつきませんか？

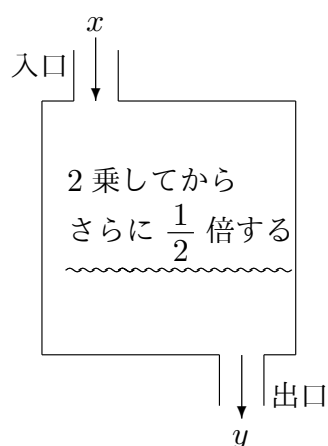
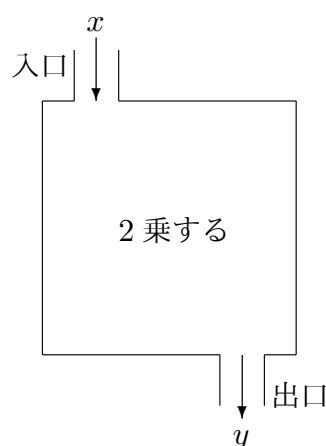
「2つの表で同じ x の値に対する y の値を比べてみると、必ず、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の表に書いてある y の値は基本となる関数 $y = x^2$ の表に書いてある y の値の $\frac{1}{2}$ 倍になっている。」

ということわかりましたか？

例えば、2つの表で x の値が -3 の所を見てみると、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の表に書いてある y の値は $\frac{9}{2}$ で、基本となる関数 $y = x^2$ の表に書いてある y の値は9です。そして $\frac{9}{2}$ って9の2倍ですよ。さっき言ったことの意味わかりましたか？

x の値が -2 の所を見ても、やっぱりそうなりますよね。2と4なのですからちゃんと $\frac{1}{2}$ 倍になっていますよね。

このようなことが、表のどこを見ても起きているわけです。でもどうしてこんなことがおきているのでしょうか。このことを考えるために次の図を見てください。

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の「決まり」の図関数 $y = x^2$ の「決まり」の図

この図を見ると、入口から同じ x を入れると、出口から出てくる y の値は必ず、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ では基本となる関数 $y = x^2$ の $\frac{1}{2}$ 倍になっているということが納得できると思います。「さらに $\frac{1}{2}$ 倍する」というところが効いているのです。

話を先に進めることにしましょう。グラフを描くための表ができたので、グラフを作ることにします。次は表を見ながら座標平面に点を打っていき、最後に点と点の間を「本当らしく」結ぶのでしたね。あなたのためにもう一度ここに表を書いておきます。たしか次のようになっていますね。

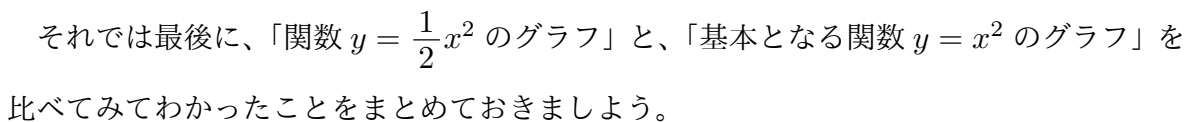
関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	...

基本となる関数 $y = x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

ではあなたも自分でノートや方眼紙を用意して 2 つの関数のグラフを作ってみてください。すると次のようになるはずです。次の図では 2 つの関数のグラフを比べるために、1 つの座標平面に 2 つのグラフを描いてあります。



「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点」と「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」 x 軸からの高さを同じ x の値のところで比べてみます。すると必ず、「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さは「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」

の x 軸からの高さの $\frac{1}{2}$ 倍になっています。これは、「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の決まり」は「基本となる関数 $y = x^2$ の決まり」に続いて「さらに $\frac{1}{2}$ 倍する」というようになっているからです。

このように、2 つの関数のグラフ上の点を同じ x の値のところで比べたときに、2 つの点の x 軸からの高さが、必ず、片方の関数のグラフ上の点はもう片方の関数のグラフ上の点の $\frac{1}{2}$ 倍になっているとき、「片方の関数のグラフはもう他方の関数のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したものになっている」ということがあります。このような言い回しを使うと、「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフは関数 $y = x^2$ のグラフを y 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に拡大したものになっている」と言うことになります。

問 37. 「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を比べることにします。以下の問に答えなさい。

- (1) グラフを描く準備として、「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 」の表と「基本となる関数 $y = x^2$ 」の表をそれぞれ作りなさい。
- (2) ノートまたは方眼紙を用意しなさい。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りなさい。
- (3) (1) で作った表をよく見て、調べた点を全て 1 つの座標平面の上に打ちなさい。
- (4) 点と点の間を「本当らしく」結んで、関数「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を完成しなさい。
- (5) 「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」の間にはどのような関係があるといえますか。88 ページの「よく理解して欲しいこと」に書いてあることを参考にして答えなさい。

問 38. 見ておわりの通り、次の関数は全て x の2乗に比例する関数です。

- ① $y = x^2$ ② $y = 3x^2$ ③ $y = \frac{1}{3}x^2$ ④ $y = 4x^2$
 ⑤ $y = -x^2$ ⑥ $y = -3x^2$ ⑦ $y = -\frac{1}{3}x^2$ ⑧ $y = -4x^2$

(1) ①から⑧の関数のグラフを、全て1つの座標平面の上に描きなさい。

(2) それぞれ②から⑧の関数のグラフを①の関数のグラフと比べ、それぞれどのような関係があるといえるか答えなさい。88ページの「よく理解して欲しいこと」に書いてあることを参考にして答えること。

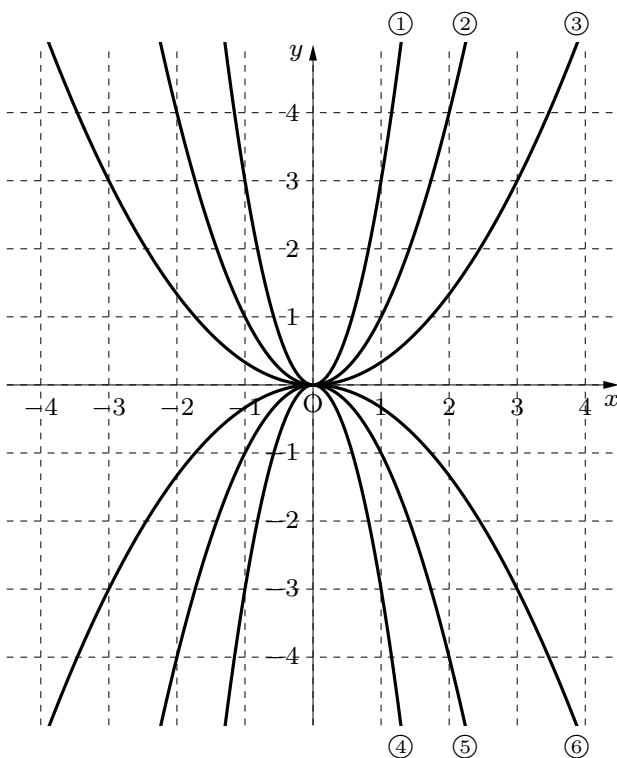
答えを見る

テーマ2 $y = ax^2$ のグラフたちはいつもどんな形になるのでしょうか。また、 $y = ax^2$ のグラフたちに共通な特徴はなんのでしょうか。

まず次の問を考えてください。

問 39. 右の図は a の値をいろいろに変えて関数 $y = ax^2$ のグラフを6個描いたものです。図の①から⑥は次の a から f のどのグラフを描いたものですか。

- a. $y = x^2$ b. $y = -x^2$
 c. $y = \frac{1}{3}x^2$ d. $y = -\frac{1}{3}x^2$
 e. $y = 3x^2$ f. $y = -3x^2$

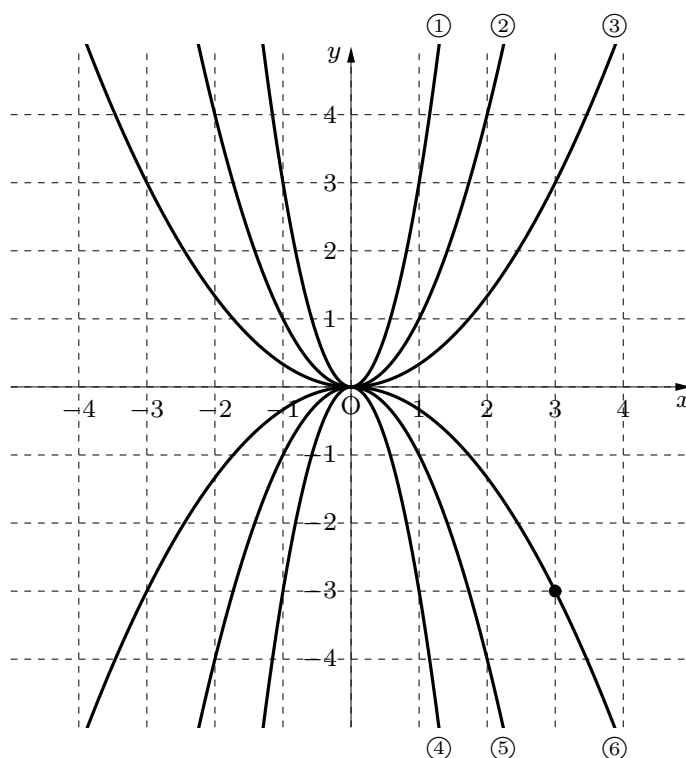


答えを見る

さて、この問 39 はわかりましたか？念のために答えを教えることにしましょう。あなたはかなり前に「1次関数」の学習をしているはずですが、そのときにもグラフを見て式

を当てる練習をしましたよね。この問 39 もそのときと同じように考えればわかるはずです。ですからあっさり考え方を説明することにします。

グラフから式を当てたいと思ったら、まず、グラフ上の点で、座標をしっかりと読み取ることができる点を探します。右の図を見てください。例えば⑥では、 $(3, -3)$ という点を読み取ることができます。(黒丸の点のことですよ。この点だったらちゃんと「格子」の上にあるので、しっかり座標を読み取ることができますよね。) このことは、⑥の関数では $x = 3$ のときに $y = -3$ となることを意味しますよね。ですから⑥の式は $y = -\frac{1}{3}x^2$ 、つまり e です。



このように考えると、この問 39 の答えは、

- ①のグラフの式は $y = 3x^2$ 、つまり c、
- ②のグラフの式は $y = x^2$ 、つまり a、
- ③のグラフの式は $y = \frac{1}{3}x^2$ 、つまり b、
- ④のグラフの式は $y = -3x^2$ 、つまり f、
- ⑤のグラフの式は $y = -x^2$ 、つまり d、
- ⑥のグラフの式は $y = -\frac{1}{3}x^2$ 、つまり e

ということになりますよね。

それでは「 $y = ax^2$ のグラフたちはいつもどんな形になるのでしょうか。」ということと、「 $y = ax^2$ のグラフたちに共通な特徴はなんなのでしょうか。」ということを考えることにしましょう。これまでの経験から次のようなことがわかると思います。

関数 $y = ax^2$ のグラフたちの形とそれらに共通な特徴は？

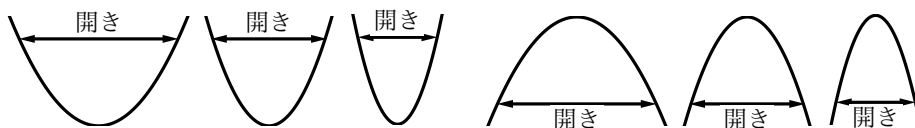
- 前の節や問 39 で、 a の値がいろいろな場合の関数 $y = ax^2$ のグラフを見ました。そして、 a の値がいくつであっても関数 $y = ax^2$ のグラフは、 \cup のような形や、 \cap のような形になることがわかったと思います。このような形の曲線は放物線（ほうぶつせん）と呼ばれています。物体を投げたとき、つまり「放ったとき」、物体が空中に描く形（つまり、「物体が通過したあと」としてできる曲線の形）なのでこのような名前がついているのです。

- a の値がいくつであっても関数 $y = ax^2$ のグラフは原点 $(0, 0)$ を通っています。

- 関数 $y = ax^2$ のグラフは、上に開いている \cup のタイプと、下に開いている \cap のタイプがあります。

a がプラスの数ときは上に開いている \cup のタイプになり、 a がマイナスの数ときは下に開いている \cap のタイプになりますね。

- $y = ax^2$ のグラフの開き具合はいろいろで、開き方が狭いもの広いものから狭いものまでいろいろなものがあります。



a がプラスの場合のグラフの開き具合 a がプラスの場合は、 a が大きくなればなるほど（つまり a が 1、2、3... となっていくと）、グラフの開き具合は小さくなります。つまり、 a が大きくなればなるほど「ほそい」グラフになりますね。

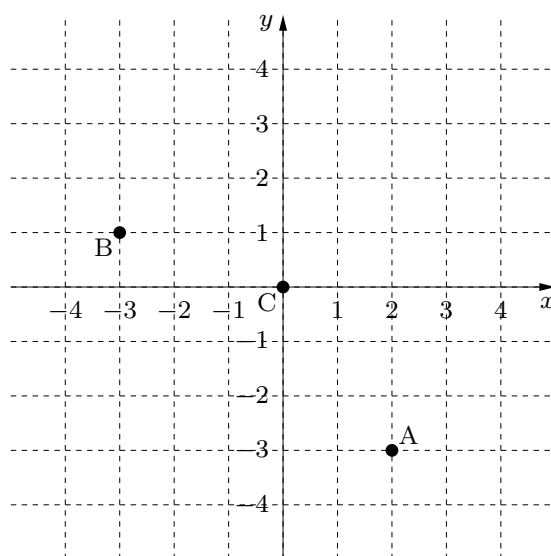
a がマイナスの場合のグラフの開き具合 a がマイナスの場合は、 a が小さくなればなるほど（つまり a が -1、-2、-3... となっていくと）、グラフの開き具合は小さくなります。つまり、 a が小さくなればなるほど「ほそい」グラフになりますね。

- a の値がいくつであっても関数 $y = ax^2$ のグラフは、 y 軸を折り目にしてグラフの描いてある紙を折るとぴったり重なります。つまり $y = ax^2$ のグラフは y 軸について対称な曲線です。
- a の値がいくつであっても関数 $y = ax^2$ のグラフと関数 $y = -ax^2$ のグラフは、 x 軸を折り目にしてグラフの描いてある紙を折るとぴったり重なります。つまり $y = ax^2$ のグラフと $y = -ax^2$ のグラフは x 軸について対称な位置にあります。

言っている意味わかりましたか？きちんと理解できたかどうか、以下の問で確認することにしてましょう。

問 40. 次の問に答えなさい。

- (1) 右の図を見てください。数学で「原点」と呼ばれているのは右の図の点 A、点 B、点 C のうちどれですか。
- (2) a の値を 2 にしたり 3 にしたり -1 にしたり $-\frac{1}{2}$ にしたり ... と、いろいろと a の値を変えれば関数 $y = ax^2$ のグラフもいろいろと変わりますが、グラフが原点を通らないものはありますか？



答えを見る

問 41. a の値がいろいろな場合の、関数 $y = ax^2$ のグラフについて考えることにします。以下の問に答えなさい。

- (1) 関数 $y = 8x^2$ のグラフを作ると、上に開いた \cup のタイプになりますか？それとも、下を開いた \cap のタイプになりますか？

- (2) 関数 $y = -5x^2$ のグラフを作ると、上に開いた \cup のタイプになりますか？それとも、下に開いた \cap のタイプになりますか？
- (3) 関数 $y = ax^2$ のグラフが上に開いた \cup のタイプになるのか、下に開いた \cap のタイプになるのか判断するには、式のどこを見てどのように判断すればよいですか？

答えを見る

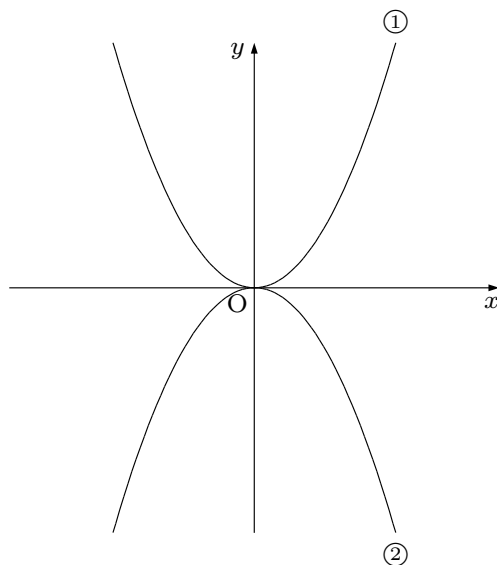
問 42. a の値がいろいろな場合の、関数 $y = ax^2$ のグラフについて考えることにします。以下の問に答えなさい。

- (1) 関数 $y = 8x^2$ のグラフと 関数 $y = 5x^2$ のグラフでは、開き具合の大きいのはどちらのグラフですか。
- (2) 関数 $y = -2x^2$ のグラフと 関数 $y = -7x^2$ のグラフでは、開き具合の大きいのはどちらのグラフですか。
- (3) 関数 $y = ax^2$ のグラフの開き具合を判断するには、式のどこを見てどのように判断すればよいですか？

答えを見る

問 43. 右の図を見てください。2つの放物線①、②が描かれています。放物線①と放物線②は x 軸に関して対称になっているとします。以下の問に答えなさい。

- (1) 放物線①が関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフだとしたら、放物線②はどんな式であらわされる関数のグラフですか？
- (2) 放物線②が関数 $y = -3x^2$ のグラフだとしたら、放物線①はどんな式であらわされる関数のグラフですか？



答えを見る

テーマ 3 関数 $y = ax^2$ の変化の様子をグラフから読み取ろう

関数 $y = ax^2$ に限らず、どんな種類の関数でも、関数のグラフを描くと関数の変化の様子を読み取ることができるということを 60 ページでおさらいしましたね。（どんな話だったか忘れてしまった人は今すぐ復習してください。この先を読んでもつまづいてしまうかもしれません。）では、「関数のグラフを描くと関数の変化の様子を読み取ることができる」という話が理解できている人のための問題を出します。次の問を考えてください。

問 44. これまでに学んできたように、関数 $y = ax^2$ のグラフは a がプラスの数のときは上に開いた形になり、 a がマイナスの数のときは下に開いた形になりますね。そして関数 $y = ax^2$ のグラフは必ず「原点」とよばれている場所を通るのでした。次の文の空欄に正しい数、式、言葉を記入しなさい。

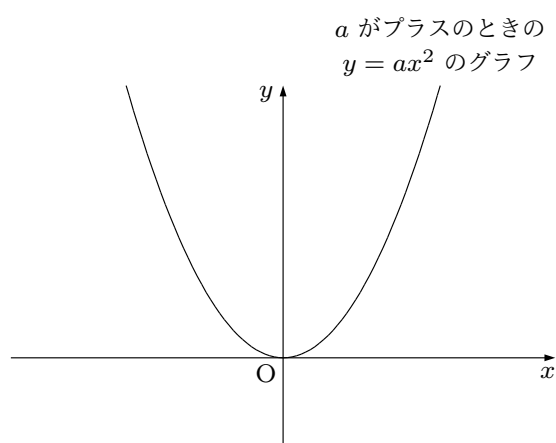
(1) a がプラスのとき、関数 $y = ax^2$ の

グラフは右の図のようになりますね。

このグラフは x が 以下の所では右 になっています。ということは、この関数は x が 以下の所では x は増えるにつれて y は ということになります。

このグラフは x が 以上の所では

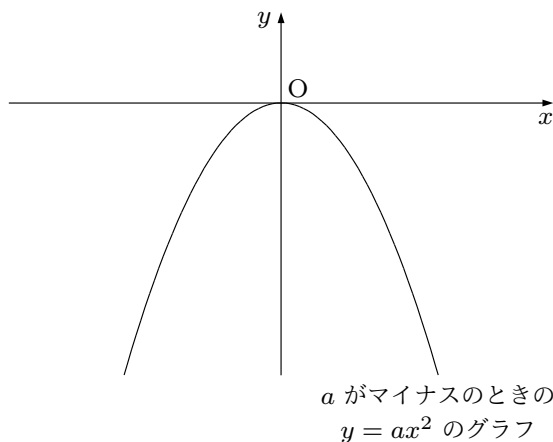
右 になっています。ということは、この関数は x が 以上の所では x は増えるにつれて y は ということになります。



(2) a がマイナスのとき、関数 $y = ax^2$ の

グラフは右の図のようになりますね。

このグラフは x が 以下の所では右 になっています。ということは、この関数は x が 以下の所では x は増えるにつれて y は ということになります。



このグラフは x が 以上の所では右 になっています。ということは、この関数は x が 以上の所では x は増えるにつれて y は ということになります。

答えを見る

2.4 x の2乗に比例する関数の式を求める話

いくつかの手がかりが与えられているときに x の2乗に比例する関数の式を求める話をこれから学びます。どうすれば式を求めていくことができるのか、考え方をしっかり理解するようにしましょう。

例題 3 ある関数があり、 y は x の2乗に比例し、 $x = 3$ のとき $y = 27$ となっています。このとき y を x の式で表しなさい。

解答

「 y は x の2乗に比例する関数」というのは「その関数の決まりを式であらわすと $y = ax^2$ という形の式になる関数」でしたね。ですから当然、これから求めようとしている関数の式は、

$$y = ax^2$$

という形をしているはずですが。しかし、 a の値は今の所不明なわけです。

問題をよく読めば、 a がいくつなのかを発見するための手がかりが書いてあるのがわかりますよね。 $x = 3$ のとき $y = 27$ となっているって書いてありますから。つまり、この関数では、 x の値を 3 にすると y の値は 27 になるということですから、 $y = ax^2$ という式の x を 3 にすると y は 27 になっているということになりますよね。というわけで、

$$27 = a \times 3^2$$

が成り立っているわけです。この式から謎の数 a の値を求めることができますよね。どうするのかというと、まず、 3^2 の所を計算して、

$$27 = a \times 9$$

としますよね。次は、この式の左辺と右辺を 9 でわって、

$$3 = a$$

とできますよね。これで謎の数 a の値がわかりました。というわけで、この問題の答えは

$$y = 3x^2$$

ということになりますね。

問 45. ある関数があり、 y は x の 2 乗に比例し、 $x = -3$ のとき $y = -18$ となっています。次の問に答えなさい。

- (1) y を x の式で表しなさい。
- (2) この関数では $x = -2$ のとき y の値はいくつになりますか。

答えを見る

2.5 x の 2 乗に比例する関数の変域を求める話

関数 $y = ax^2$ に限らず、関数の変域については、11 ページで詳しくおさらいしました。(どんな話だったか忘れてしまった人は今すぐ復習してください。この先を読んでもつま

づいてしまうかもしれません。)では、「関数の変域」の話が理解できている人のための問題を出します。次の問を考えてください。

問 46. 次の関数の y の変域を求めよ。

- (1) 関数 $y = x^2$ の $1 \leq x \leq 4$ における y の変域
- (2) 関数 $y = x^2$ の $-3 \leq x \leq 2$ における y の変域
- (3) 関数 $y = x^2$ の $-4 \leq x \leq 4$ における y の変域
- (4) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の $-4 \leq x \leq 1$ における y の変域
- (5) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の $-3 \leq x \leq 10$ における y の変域
- (6) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ の $-6 \leq x \leq 6$ における y の変域
- (7) 関数 $y = -3x^2$ の $-5 \leq x \leq -2$ における y の変域
- (8) 関数 $y = -3x^2$ の $-2 \leq x \leq 1$ における y の変域
- (9) 関数 $y = -3x^2$ の $2 \leq x \leq 4$ における y の変域

答えを見る

さてどうだったでしょうか。念のため、ここに答えを書いておきます。

問 46 の答え

- | | | |
|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| (1) $1 \leq y \leq 16$ | (2) $0 \leq y \leq 9$ | (3) $y = 0$ |
| (4) $0 \leq y \leq 8$ | (5) $0 \leq y \leq 50$ | (6) $y = 0$ |
| (7) $-75 \leq y \leq -12$ | (8) $-12 \leq y \leq 0$ | (9) $-48 \leq y \leq -12$ |

間違えた問題があり、どうして自分の答えが間違っているのかわからない人はこの先に進んではいけません。今すぐ、11 ページを開いて「関数の変域」を全て復習してください。そこに書いてあるのは非常に重要なことです。そこに書いてあることさえ理解できていれば、どんな関数の変域で求めることができるのです。

ではこれから、11 ページの「関数の変域」に書いてあることが全て理解できている人のために少し上級者向けの話をすることにします。関数の変域を求めるために関数のグラフを役立てることができるのです。そこでまず念のため、関数のグラフの作り方を思い出し

てもらうことにしましょう。関数のグラフの作り方については第 1.4 節の中の 49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」で詳しくおさらいしました。念のため、簡単に思い出しておくことにします。

関数のグラフの作り方：まず、入口から入れる x の値を適切にたくさん用意し、それらの値に対して出口から出てくる y の値を計算して表にまとめておきます。次に、表を見ながら座標平面に点を打っていきます。点を打ち終わったら点と点の間を「本当らしく」結びます。

このようにして関数のグラフを作ることができるのでしたね。(何を言っているのかわからなかった人はこのまま先を読むと大変です。今すぐ、49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」を復習してください。)

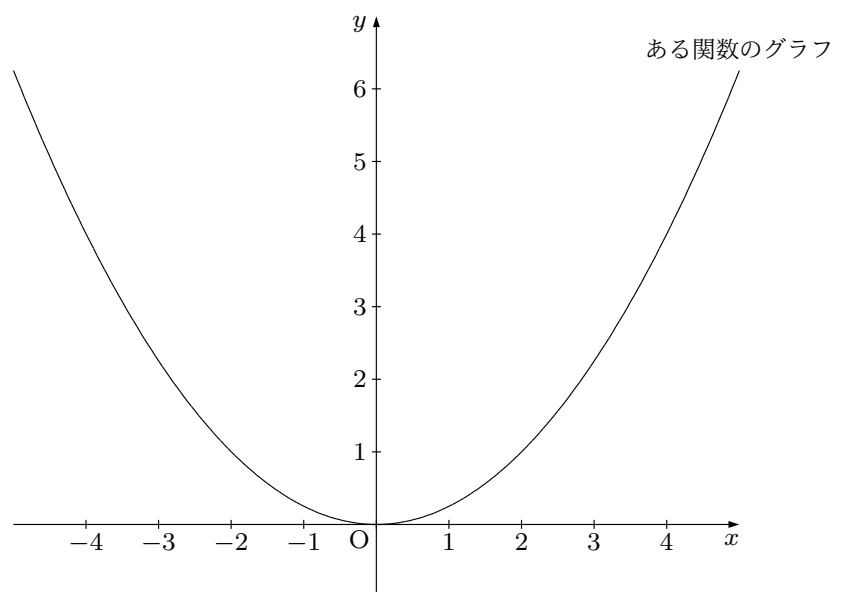
では、関数のグラフの作り方が理解できている人は次の問を解いてください。

問 47. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを大きめに描きなさい。

[答えを見る](#)

大丈夫ですよ。では話を進めます。今度は次の問を解いてください。

問 48. 右の図は、ある関数のグラフを極めて正確に描いたものです。関数を表す式は不明です。しかも、この関数は x の 2 乗に比例する関数なのかどうかもわかりません。この関数について以下の問に答えなさい。



(1) この関数では、 x の値が

2 のとき y の値はだい

たいいくつですか。グラフから読み取りなさい。

(2) この関数では、 x の値が -4 のとき y の値はだいたいいくつですか。グラフから読

み取りなさい。

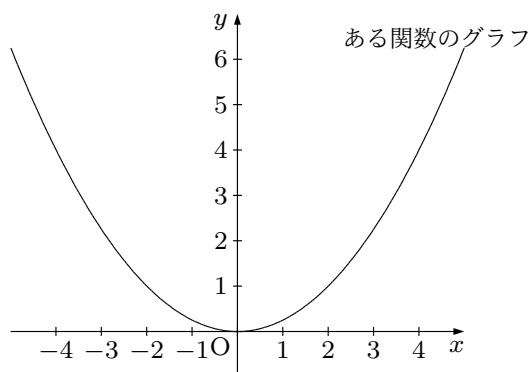
- (3) この関数では、 x の値が -3 のとき y の値はだいたいいくつですか。グラフから読み取りなさい。

答えを見る

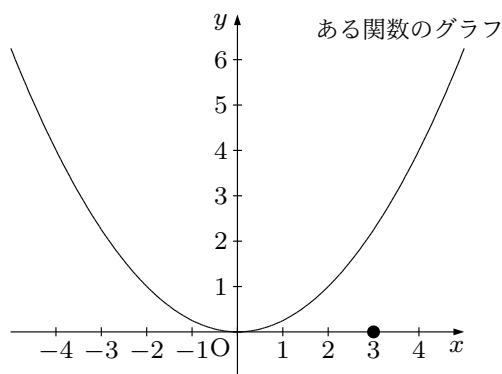
この問ですが大丈夫ですよ。でも、もしかして、「式がわからないんだからこんな問題解けるわけないじゃん。」って思った人いませんか？そういう人のために、念のため説明します。

問 48 の答え

右の図を見てください。グラフが右の図のようになっている関数で、例えば x の値が 3 のとき y の値がいくつになるのか知りたいと思ったとしましょう。グラフの作り方を理解できている人にとっては当たり前のことなのですが、次のようにしていけばよいのです。

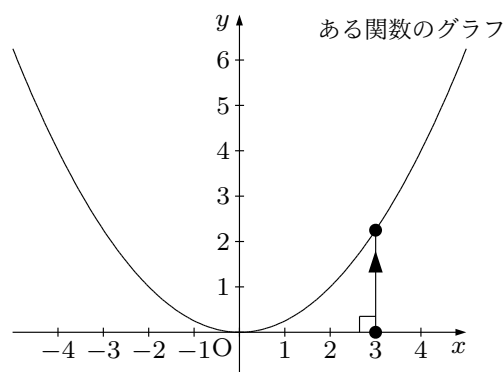


- (1) x の値が 3 のときの y の値が知りたいのですから、まず x 軸の上に x の値が 3 になっている点を見つけます。(右の図では黒い点を打ってあります。)



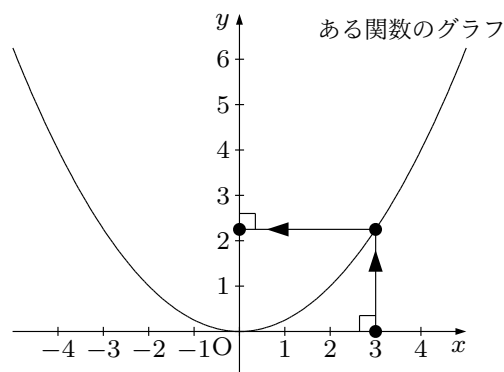
- (2) 次は (1) で打った x 軸上の点からグラフへ

向かって進んでいきます。ただし、 x 軸に垂直に進まなくてははいけません。進んでいくとそのうちグラフにぶつかりますがそこでストップします。(右の図ではストップした所に黒い点を打ってあります。)



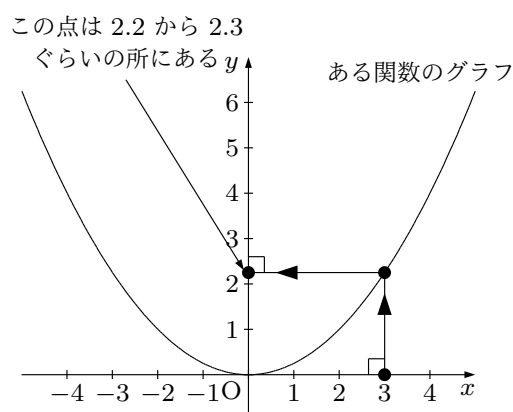
- (3) 次は (2) で打ったグラフ上の点から y 軸へ

向かって進んでいきます。ただし、 y 軸に垂直に進まなくてははいけません。進んでいくとそのうち y 軸にぶつかりますがそこでストップします。((右の図ではストップした所に黒い点を打ってあります。))



- (4) y 軸についている目盛りを使って (3) で見つ

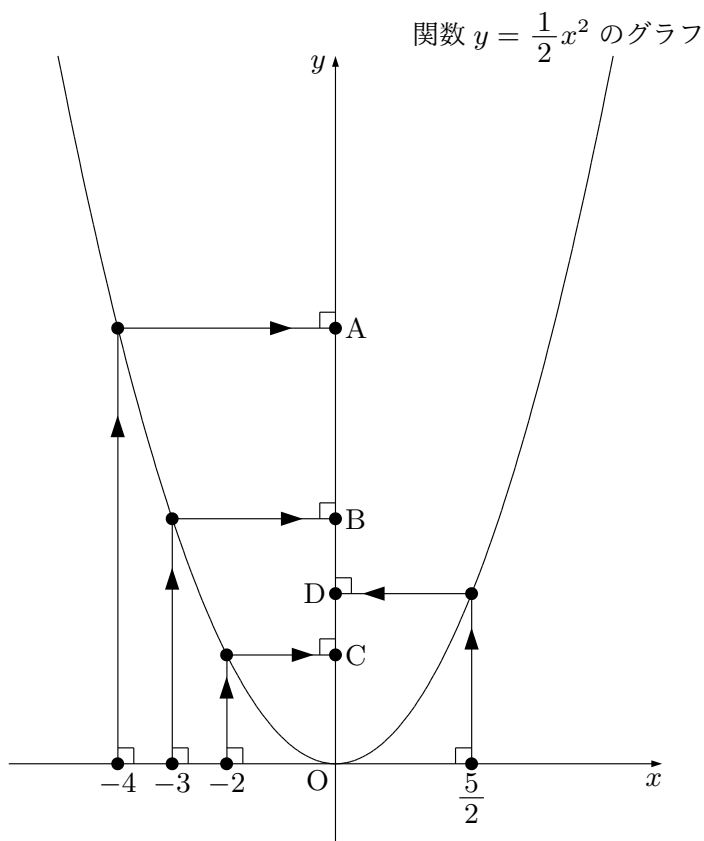
けた y 軸上の点の数値をできるだけ正確に読み取ります。右の図を見ると、(3) で見つけた y 軸上の点は目盛りの数値が 2 と 3 の間にありますね。ですから (3) で見つけた y 軸上の点の数値は 2. (にいてんナントカナントカ ...) ということになります。





しかし、もっと注意深く図を見ると、(3) で見つけた y 軸上の点はかなり「2 寄り」にあることがわかりますね。ですからきっと (3) で見つけた y 軸上の点の数値は 2.2. (にいてんにナントカナントカ ...) とか、2.3. (にいてんさんナントカナントカ ...) とかいうことなのでしょうね。

というわけで、この関数では x の値が3のとき、 y の値はだいたい $2.2\cdots\cdots$ (にいてんにナントカナントカ...) とか $2.3\cdots\cdots$ (にいてんさんナントカナントカ...) ぐらいになるということがグラフからわかったのです。

問 49. 次の図は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを描いたものです。



この図にはいくつか  や  のような「矢のついた折れ線」が描いてあります。

この図を見て以下の問に答えなさい。

- (1) y 軸上の A の所を書いてある数はいくつのはずですか。
- (2) y 軸上の B の所を書いてある数はいくつのはずですか。
- (3) y 軸上の C の所を書いてある数はいくつのはずですか。
- (4) y 軸上の D の所を書いてある数はいくつのはずですか。
- (5) $x = -4$ のときの y の値を求めよ。
- (6) $x = -3$ のときの y の値を求めよ。

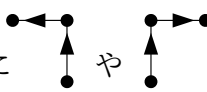
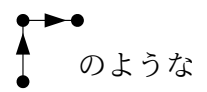
(7) $x = -2$ のときの y の値を求めよ。

(8) $x = -0$ のときの y の値を求めよ。

(9) $x = \frac{5}{2}$ のときの y の値を求めよ。

答えを見る

さて、問 49 では関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフのほ

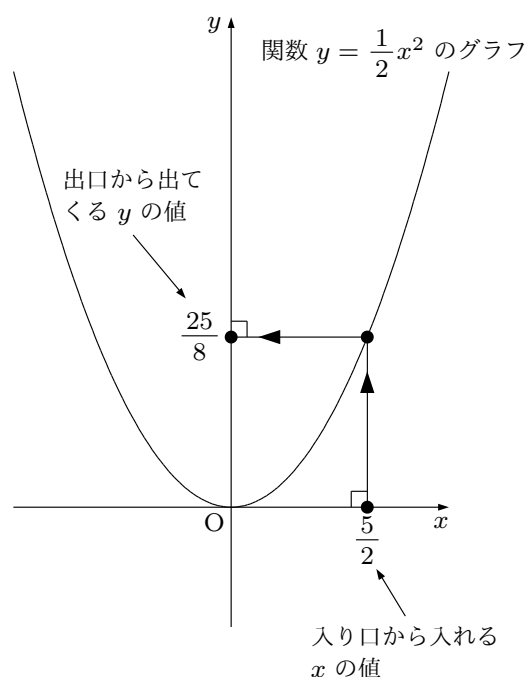
かに  や  のような「矢のついた折れ線」が描いてありました。このような矢印の意味は問 49 の前に詳しく説明してあるのでおわかりだと思いますが、念のためもう一度簡単に説明しておきます。

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ では、例えば x に $\frac{5}{2}$ を代入すると y の値は $\frac{25}{8}$ となりますよね。つまり、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ では入り口から $x = \frac{5}{2}$ を入れると出口から $y = \frac{25}{8}$ が出てくるということですよね。

また、関数のグラフは「入り口から入れる x の値と出口から出てくる y の値を組にしてできる点」をすべて打つと出来上がるのでしたね。

ですから「矢のついた折れ線」の片方の端には「入り口から入れる x の値」が書かれていてもう片方の端には「出口から出てくる y の値」が書かれているはずなのです。(この図をもう一度よく見てください。)

ここまでの話が納得できた人は、次に、入り口から入れる x の値をほんの少し増やすと「矢のついた折れ線」がどうなっていくのか想像してみることにしましょう。



右の図を見てください。上下に2つの図が描かれています。

上の段の図では、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、ある x の値を入れるとある y の値が出てくるということ

を示すために「矢のついた折れ線」が描かれています。

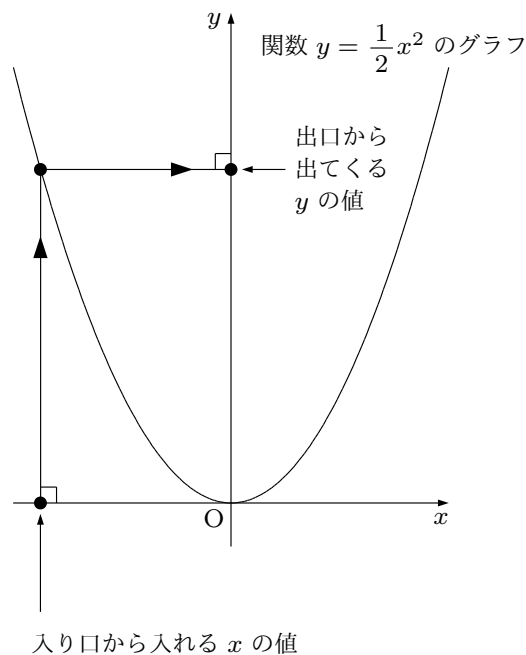
入り口から入れる x の値をほんの少し増やすと「矢のついた折れ線」の場所はずれていきます。そのことをあらわすための図を下の段に描きました。下の段の図では、さっき上の段の図

で描いた「矢のついた折れ線」を点線で描き換えました。そしてさっきよりほんの少し x の値を増やしたときの「矢のついた折れ線」を

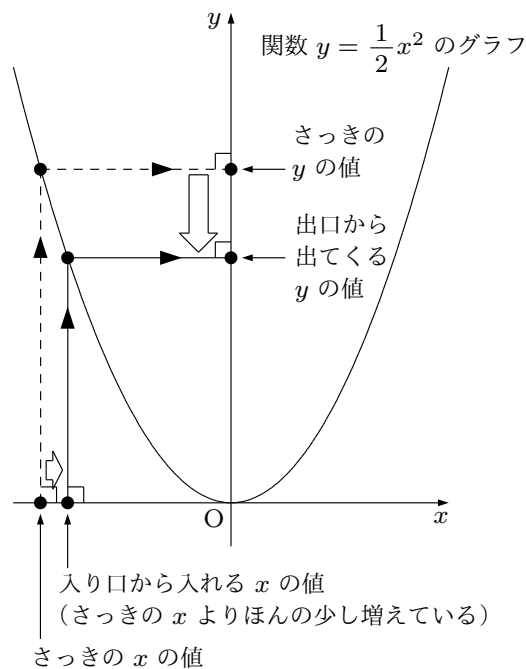
実線で描きました。

ほんの少し x の値を増やしたので、より少し右にずれた場所にあるのです。

この図の場合では、 \Downarrow で示されているように x の値を少し増やすと、 \Downarrow で示されているように出てくる y の値は結構減るということがわかり

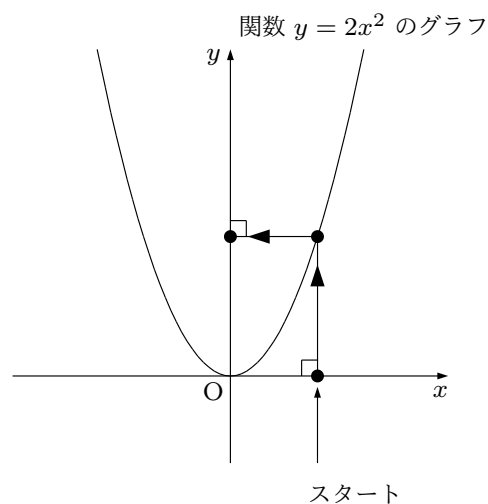


入り口から入れる x の値をほんの少し増やすと...



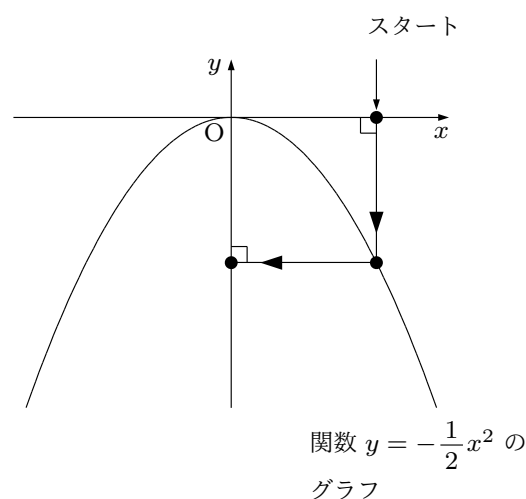
ますね。

問 50. 右の図は関数 $y = 2x^2$ のグラフです。入り口から入れる x の値をこの図で「スタートと書いてあるところの数」よりほんの少し増やすと、出口から出てくる y の値は「スタートのところに書いてある数」を入れたときに比べてどのようにかわりますか。



[答えを見る](#)

問 51. 右の図は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフです。入り口から入れる x の値を図で「スタートと書いてあるところの数」よりほんの少し増やすと、出口から出てくる y の値は「スタートのところに書いてある数」を入れたときに比べてどのようにかわりますか。



[答えを見る](#)

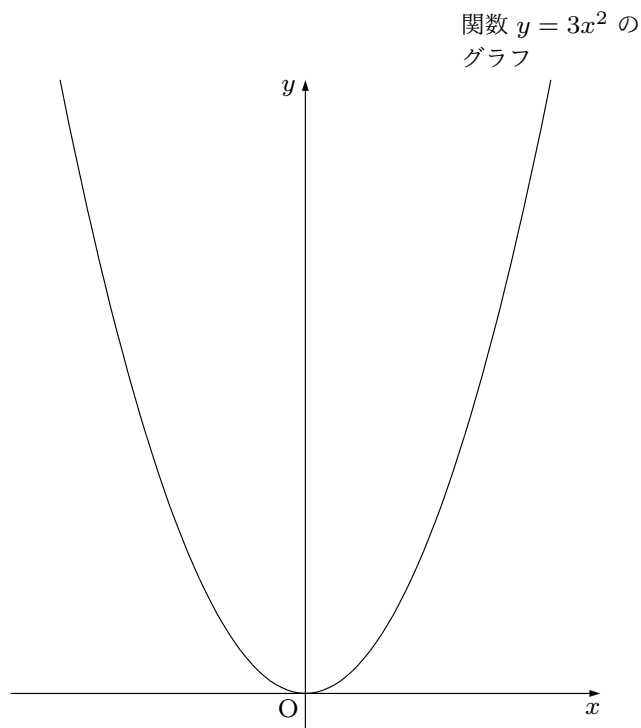
さて、ここまでの話を自分の頭を使って考え理解ができた人は、少し上級者向けの「関数の変域を読み取る方法」を学ぶ準備ができたことになります。その方法を次の例題で説明しましょう。

例題 4 （少し上級者向けの「関数の変域を読み取る方法」）

関数 $y = 3x^2$ で x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

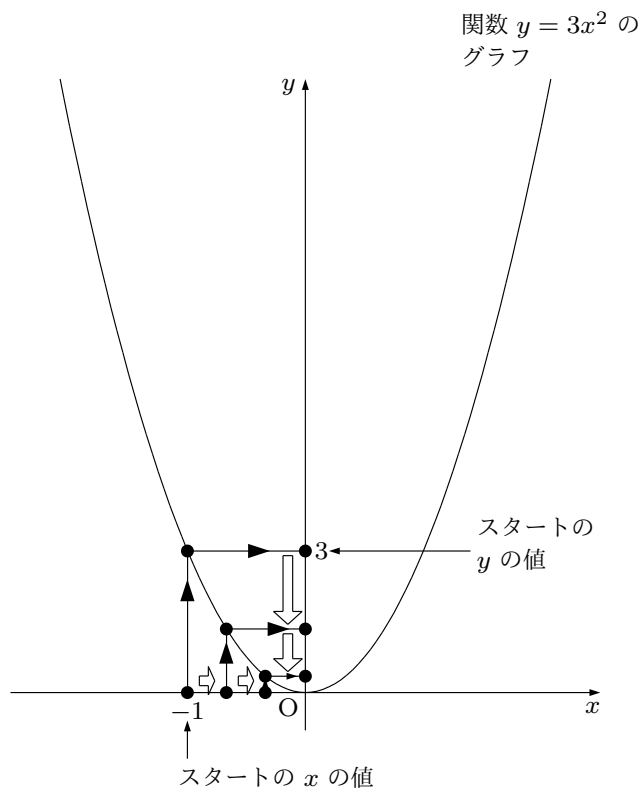
解答

まず、関数 $y = 3x^2$ のグラフを作ります。(あまり本格的に作る必要はありません。どうせ、 \cup のような形になるわけですし、原点を通っていることや y 軸について対称になっていることに注意しておけば十分です。) そうすると右のようなグラフができあがります。



では変域を読み取る話に入りましょう。右の図を見ながら考えることにします。

この問題は「関数 $y = 3x^2$ で入り口から x の値として -1 以上 2 以下のありとあらゆる数をいれていくと、出口から出てくる数 y はどんな範囲の数になりますか」という意味の問題ですね。ですから、 $x = -1$ をスタートにして少しずつ x の値を増やしていき、出口から出てくる y の値がどのように変わっていくのかグラフを使って考えればよいわけです。

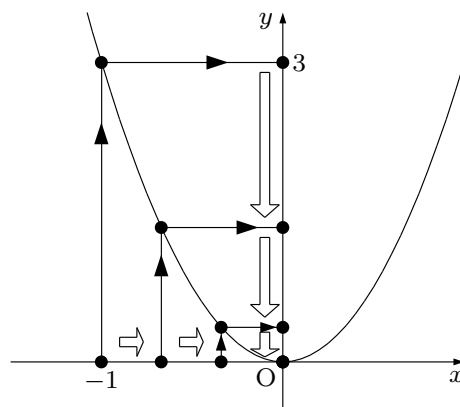


右の図を見ながら考えてみましょう。

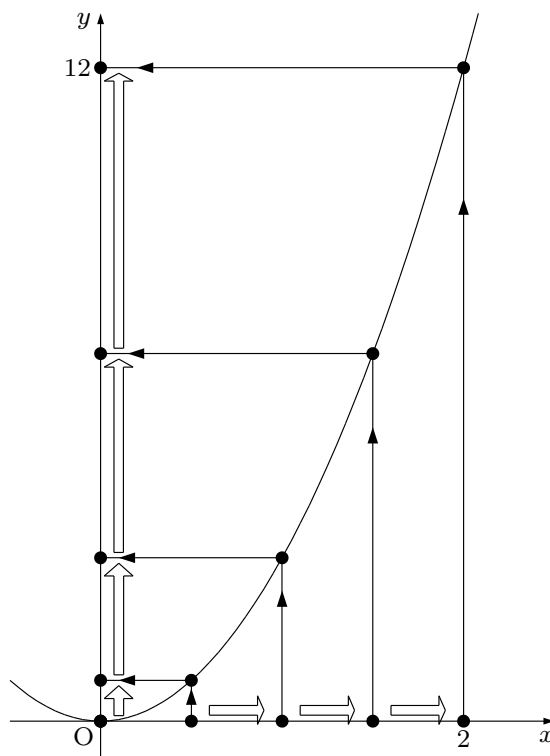
まず、スタートとして入り口から $x = -1$ を入れるわけですが、 $y = 3x^2$ という式を使って計算すると出口から $y = 3$ が出てくることがわかりますね。

では、入り口から入れる x の値を -1 から少しずつ増やしていくことにしましょう。すると「矢のついた折れ線」は右の図のようにずれていくことがわかります。このことは、 x の値を -1 から少しずつ増やしていくにつれて、出口から出てくる y の値はどんどん減っていくということを意味していますね。しかし永遠に減るわけではありません。あるとき転機が訪れます。グラフを見るとわかりますが、 x の値が 0 になるときです。このとき y の値は 0 にまで減っています。(さらに、 y の値が 0 より減ることはないということもグラフを見るとわかりますね。 y の値は一番小さくなった場合 0 になっているわけです。)

ではさらに、入り口から入れる x の値を 0 から少しずつ増やしてみましょう。すると「矢のついた折れ線」は右の図のようにずれていくことがわかります。このことは、 x の値を 0 から少しずつ増やしていくにつれて、出口から出てくる y の値はどんどん増えていくということを意味していますね。しかし永遠に減るわけではありません。あるとき終わりがきます。だって、この問題では x の変域は $-1 \leq x \leq 2$ なのですから x が 2 になったら終わりにするのですよね。 $y = 3x^2$ という式を使って計算すると、 x の値が 2 のとき、出口から $y = 12$ が出てくる



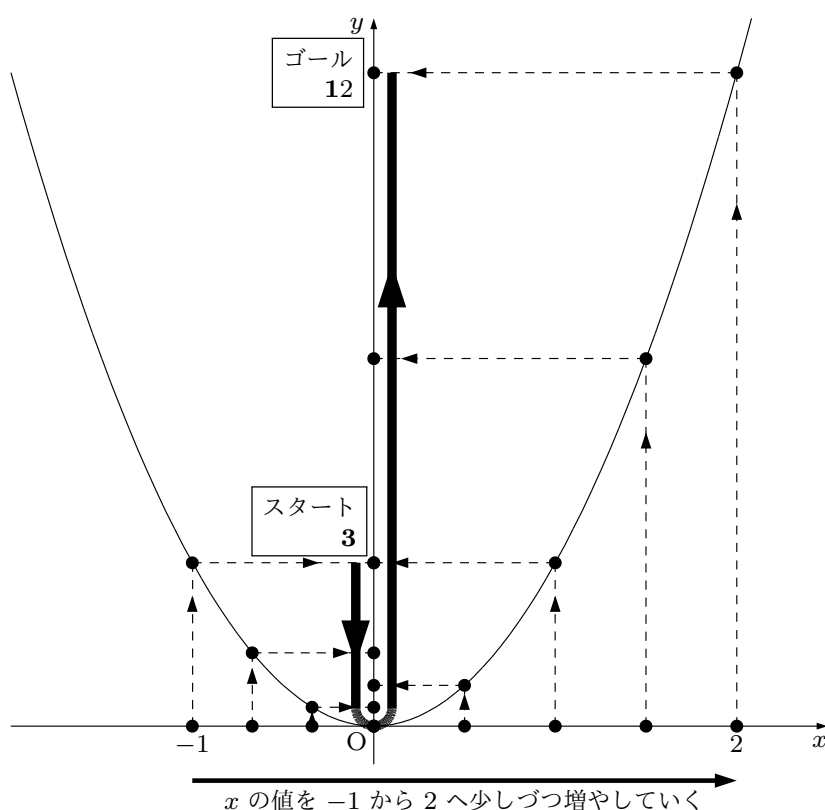
x の値 -1 から少しずつ増やしていくと「矢のついた折れ線」は右にずれていき、高さは低くなっていく。



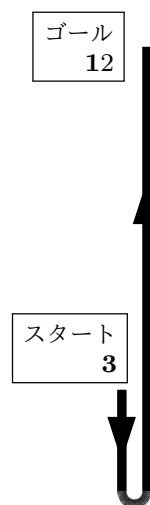
さらに x の値を 0 から少しずつ増やしていくと「矢のついた折れ線」は右にずれていき、高さは高くなっていく。

ということがわかります。

さてこれで、入り口から入れる x の値を少しずつ -1 から 2 へ増やしていくと出口から出てくる y の値がどのようなようになっていくのか全てわかりました。念のため次の図にまとめておきます。



左の図で y 軸のまわりにつけた



を見るとわかるように、この関数では入り口から入れる x の値を少しずつ -1 から 2 へ増やしていくと、出てくる y の値は初めは 3 、そしてまずだんだん減ってそのうち 0 になり、その後はだんだん増えていき最後は 12 となる。

というわけで、この関数では x の変域が $-1 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は

$$0 \leq y \leq 12$$

である（つまり 0 から 12 までの数が全て出てくる）ことがわかりました。

問 52. 例題 4 の解答が理解できた人のための問題です。

例題 4 で学んだ方法で次の関数の変域を求めなさい。

- (1) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域
- (2) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のときの y の変域
- (3) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 3$ のときの y の変域
- (4) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq -1$ のときの y の変域
- (5) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq 0$ のときの y の変域
- (6) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq 9$ のときの y の変域
- (7) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $3 \leq x \leq 9$ のときの y の変域
- (8) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のときの y の変域

答えを見る

2.6 x の 2 乗に比例する関数の変化の割合

関数 $y = ax^2$ に限らず、関数の変化の割合についてはもうすでに 20 ページから始まる「1.3 関数の変化の割合」で詳しくおさらいしましたね。（忘れてしまった人は今すぐ復習してください。このまま先に進むと大変なことになります。）

では、「1.3 関数の変化の割合」でおさらいしたことがきちんと理解できている人への問題です。

問 53. 次の関数で、 x の値を次のように変えるときの変化の割合を求めなさい。

- (1) 関数 $y = -2x^2$ で x の値を 1 から 3 へ変えるときの変化の割合
- (2) 関数 $y = -2x^2$ で x の値を -1 から 2 へ変えるときの変化の割合

(3) 関数 $y = -2x^2$ で x の値を 2 から -3 へ変えるときの変化の割合

(4) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x の値を 0 から 3 へ変えるときの変化の割合

(5) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x の値を -3 から 3 へ変えるときの変化の割合

答えを見る

念のため答えを書いておきましょう。

問 53 の答え

(1) -8 (2) -2 (3) 2 (4) -1 (5) 0

大丈夫ですよ。全問正解できましたよね。実はこの問題、34 ページの問 13 の (6)～(10) と同じ問題なんです。間違った問題があった人は反省をしてすぐに 20 ページの「1.3 関数の変化の割合」をすべて復習してください。

変化の割合の求め方についてはこれ以上話することはなにもありません。そこでこれから、変化の割合が関係している少し上級者向けの話を学ぶことにします。

テーマ 1 関数の変化の割合を関数のグラフを使って解釈するとどんな意味があるのでしょうか

昔学んだ 1 次関数 $y = ax + b$ では、 x の値をいくつからいくつへどのように変えても変化の割合を計算すると必ず a という値になってしまうのでしたね。そして 1 次関数では、変化の割合はグラフの傾き具合を表しているということも学びましたね。覚えていますよね。

では、関数 $y = ax^2$ (つまり x の 2 乗に比例する関数) では、変化の割合はどんなことを表しているのでしょうか。このことについて、これから問を解きながら考えていくことにします。

問 54. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について考えることにします。以下の問に答えなさい。

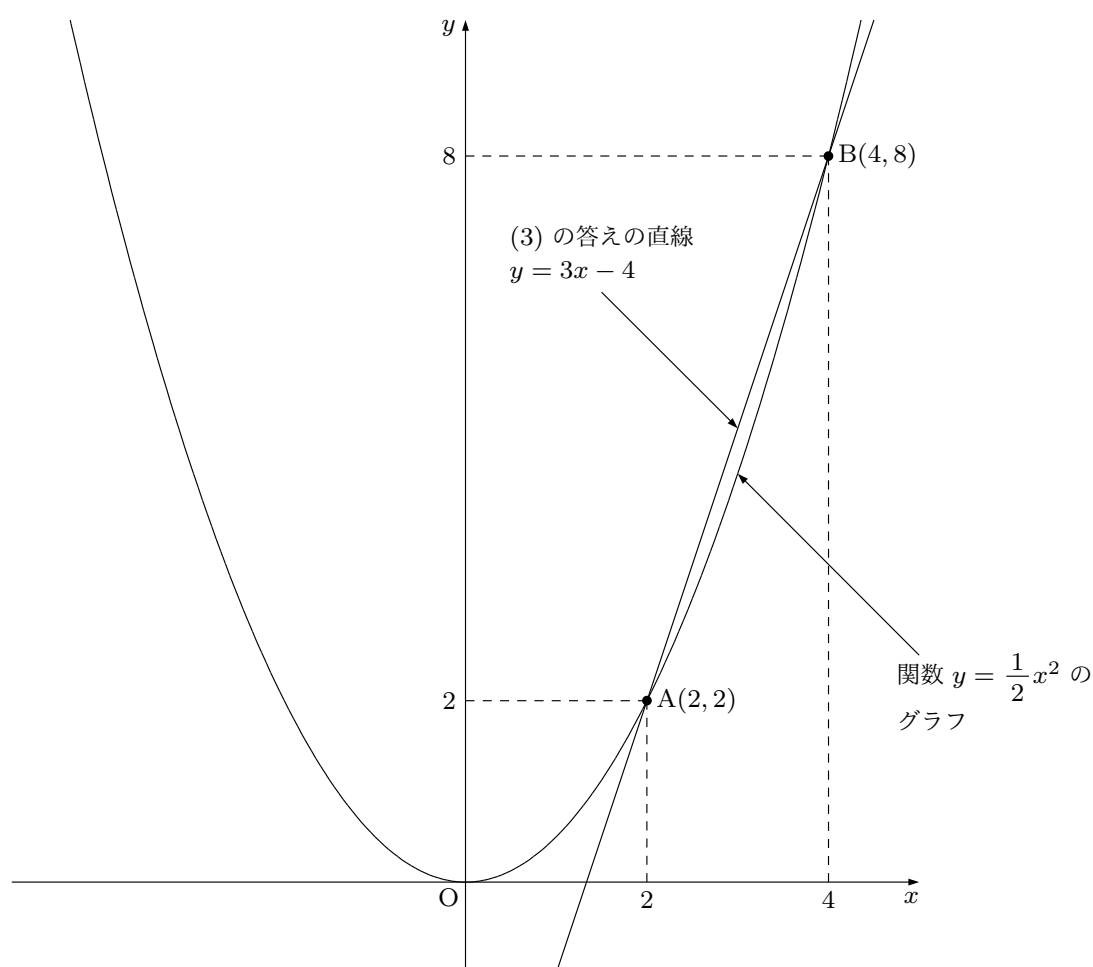
(1) この関数のグラフを描きなさい。

(2) グラフの上に x 座標が 2 である点 A と、 x 座標が 4 である点を打ちなさい。また、点 A と点 B のそばにそれぞれの点の座標を記入しなさい。

- (3) 2 点 A、B を通る直線を描きなさい。また、この直線の式を求めなさい。
- (4) (3) で描いた直線の傾きを答えなさい。
- (5) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、 x の値を 2 から 4 へ変えるときの変化の割合を求めなさい。

[答えを見る](#)

さて、全部正しくできたでしょうか。正しくできた人は次のような図ができているはずです。



ではさらに、問 54 の続きの問題です。

問 54 の続き

- (6) (3) で点 A と点 B を通る直線を描きましたが、その直線の式は $y = 3x - 4$ ですね。では、関数 $y = 3x - 4$ で x の値を 2 から 4 へ変えたときの変化の割合を求めなさい。

(7) 作った図を見るとわかりますが、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフも関数 $y = 3x - 4$ のグラフも2点 A(2, 2)、B(4, 8) を通っていますね。

ところでさっき、(5) と (6) ではそれぞれ「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で x の値を2から4へ変えたときの変化の割合」と「関数 $y = 3x - 4$ で x の値を2から4へ変えたときの変化の割合」を求めました。この2つの値を比べるとどんなことが言えますか。

ということなのか話は見えてきましたか？ 問54を通して理解して欲しいことの要点をこれから説明しましょう。

2つの関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = 3x - 4$ がでてきましたね。また、それぞれの関数のグラフはどちらも2点 A(2, 2)、B(4, 8) を通っていました。(まあ、関数 $y = 3x - 4$ のほうは、2点 A(2, 2)、B(4, 8) を通る直線として出てきたんですけどね。)

ところで、それぞれの関数で、 x の値を2から4へ変えたときの変化の割合を求めなさいと言われたら、20ページから始まる「1.3 関数の変化の割合」で詳しくおさらいしたように、まず表を作って情報を整理しますよね。そうすると次のようになります。

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で、 x の値を2から4へ変えたときの変化の割合を求めるための表	先に入れた x		あとに入れた x	
	x	↓	2 増えている	↓
		2→	4
	y	2→	8
		↑	6 増えている	↑
		先に出てきた y		あとに出てきた y

関数 $y = 3x - 4$ で、 x の値を2から4へ変えたときの変化の割合を求めるための表	先に入れた x		あとに入れた x	
	x	↓	2 増えている	↓
		2→	4
	y	2→	8
		↑	6 増えている	↑
		先に出てきた y		あとに出てきた y

よく見ると、この2つの表は全く同じです。でも、ちょっと考えると、「そりゃそう

だ」って思いますよね。だって、どちらの関数のグラフも 2 点 $A(2, 2)$ 、 $B(4, 8)$ を通っているのですから。つまり、どちらの関数も $x = 2$ のとき $y = 2$ となり、 $x = 4$ のとき $y = 8$ となっているわけです。そして、 x の値を 2 から 4 へ変えたときの変化の割合を求めるために、この表にまとめたこと以外の情報は全く使われないからです。

つまり、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ でも関数 $y = 3x - 4$ でも $x = 2$ のとき $y = 2$ となり、 $x = 4$ のとき $y = 8$ となっているのですから、「関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で x の値を 2 から 4 へ変えたときの変化の割合」と「関数 $y = 3x - 4$ で x の値を 2 から 4 へ変えたときの変化の割合」は等しくなるのです。

さらに、今、たまたま関数 $y = 3x - 4$ は 1 次関数の仲間ではグラフは直線になっているわけですが、1 次関数では変化の割合を求めると必ず「傾き」と呼ばれる数に等しくなるのでしたね。(1 次関数の「傾き」って何なのか覚えていますよね。1 次関数とは $y = ax + b$ という形の式で表される関数ですが、この式の中に出てくる a のことを「傾き」と呼ぶのでしたね。) ですから、ここまでの話を総合すると、

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ で x の値を 2 から 4 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフの上に x 座標が 2 である点と x 座標が 4 である点を打ってからその 2 点を通る直線を描くと、その直線の傾きに等しくなっている。

ということになるのです。

問 55. この問の前の話が理解できた人のための問題です。

- (1) まず、関数 $y = 2x^2$ のグラフを描きなさい。そして、関数 $y = 2x^2$ で x の値を 1 から 3 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフ上のどんな 2 点を通る直線の傾きになっているのか答えなさい。さらに、その直線の式も答えなさい。
- (2) まず、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きなさい。そして、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ で x の値を -4 から 2 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフ上のどんな 2 点を通る直線の傾きになっているのか答えなさい。さらに、その直線の式も答えなさい。

答えを見る

テーマ2 変化の割合が出てくる少し上級者向けの問題

例題5 x の2乗に比例する関数 $y = ax^2$ があるとします。ただし、今のところ a がいくつなのかはわかりません。この関数で、 x が3から5へ変わるときの変化の割合は4であるとしたら、 a はいくつのはずですか。

解答

この問題では、関数の決まりをあらわす式 $y = ax^2$ の中に謎の数 a が入っています。そして「 x が3から5へ変わるときの変化の割合は4である」という手がかりがあります。 a はいくつなのかわかっていないので関数の決まり自体ははっきりしていませんが、手がかりを使えるようにするため、 a は a のままでいつものように変化の割合を求めてみることにします。

いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくると、右のようになりますね。(この表の作り方がわからない人は今すぐ20ページから始まる「1.3 関数の変化の割合」をすべて復習してください。わからないまま先に進むと大変なことになります。)

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	3→	5
	↓		↓
y	9a→	25a
	↑	16a 増えている	↑
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

この表から関数 $y = ax^2$ で x が3から5へ変わるときの変化の割合を求めると、

$$\text{変化の割合} = \frac{16a}{2} = 8a$$

となりますよね。

一方、この問題では関数 $y = ax^2$ で x が3から5へ変わるときの変化の割合は4になると書いてあるのですから、今求めた $8a$ と4は等しいはずです。つまり、

$$8a = 4$$

となっているわけです。これで謎の数 a を見つけるための式ができました。この式から、

$$a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

であることがわかりますね。

問 56. x の 2 乗に比例する関数 $y = ax^2$ があるとします。ただし、今のところ a がいくつなのかはわかっていません。この関数で、 x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 であるとしたら、 a はいくつのはずなのか、以下の文のように考えることにしました。空欄に正しい数、式を記入しなさい。

この問題では、関数の決まりをあらわす式 $y = ax^2$ の中に謎の数 a が入っています。そして「 x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 である」という手がかりがあります。 a はいくつなのかわかっていないので関数の決まり自体ははっきりしていませんが、手がかりを使えるようにするため、 a は a のままでいつものように変化の割合を求めてみることにします。

いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくと、右のようになりますね。

この表から関数 $y = ax^2$ で x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合を求めると、

$$\text{変化の割合} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = -5a$$

となりますよね。

一方、この問題では関数 $y = ax^2$ で x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 になると書いてあるのですから、今求めた $-5a$ と $\boxed{}$ は等しいはずです。つまり、

$$-5a = \boxed{}$$

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	$\boxed{}$ 増えている	↓
x	-4	-1
y	$\boxed{}$	$\boxed{}$
	↑	$\boxed{}$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

となっているわけです。これで謎の数 a を見つけるための式ができました。この式から、

$$a = \frac{\square}{\square} = -2$$

であることがわかりますね。

答えを見る

例題 6 x が -2 から 4 へ変えるとき、2つの関数 $y = ax^2$ と $y = x + 4$ の変化の割合は等しくなるという。 a の値を求めなさい。

解答

問題文には2つの関数 $y = ax^2$ と $y = x + 4$ が現れていますが、関数 $y = x + 4$ のほう
は式の中に謎の数などはなく、正体のはっきりした関数です。そして幸いなことに、関数
 $y = x + 4$ は1次関数ですから、変化の割合について「驚くべき事実」が成り立っている
のでしたね。(覚えていますよね。昔、1次関数を学習したときしっかり学びましたよね。
1次関数 $y = ax + b$ では x の値をいくつからいくつへどのように変えても、変化の割合
を計算すると必ず a になってしまうという話のことですよ。) つまり、関数 $y = x + 4$ は
1次関数ですから、驚くべき事実によると、変化の割合を求めるときにいちいちまじめに
表なんかつくらなくても、

1次関数 $y = x + 4$ で x が -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は1である

ということがわかってしまうのです。

ここまでくれば、あとは例題5と同じように解けるはずですよ。次の問であなたに答えを
出してもらうことにしましょう。

問 57. 例題6の解答をきちんと読んだ人のための問題です。

例題6の解答の続きを考えて例題6を最後まで解きなさい。

答えを見る

例題 7 関数 $y = -2x^2$ で、 x が a から $a + 2$ へ変わるときの変化の割合は -16 である
としたら、 a はいくつのはずですか。

解答

さっきまでの例題とちがい、この例題では関数の式ははっきり決まっていますが、 x がいくつからいくつへ変化するのかということが謎になっていますね。まあ、でもそんなことは気にしないで a は a のままで変化の割合を求めてみることにしましょう。

まず、いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくることにします。そのために必要なことを計算してみます。

x は a から $a+2$ へ変わるので 2 増えていますよね。

一方 y は $-2a^2$ から $-2(a+2)^2$ へ変わります。ですからどれだけ増えているか調べるためにひき算を使うと、次のように、 y は、

$$\begin{aligned} -2(a+2)^2 - (-2a^2) &= -2(a^2 + 4a + 4) - (-2a^2) \\ &= -2a^2 - 8a - 8 + 2a^2 \\ &= -8a - 8 \end{aligned}$$

増えていることがわかります。

ですから、今調べたことを表にまとめると右のようになりますね。

というわけで、

$$\text{変化の割合} = \frac{-8a-8}{2} = -4a-4$$

となりますよね。

ところでこの問題では、変化の割合は -16 になると書いてあるのですから今求めた $-4a-4$ と -16 は等しいはずです。つまり、

$$-4a-4 = -16$$

が成り立っているわけです。これで謎の数 a を発見するための式ができました。あとはこの式を解いて a の値を求めれば良いわけです。次のように計算をすすめることができま

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	a→	$a+2$
y	$-2a^2$→	$-2(a+2)^2$
	↑	$-8a-8$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

す。まず、左辺と右辺に4をたすと、

$$-4a - 4 + 4 = -16 + 4$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$-4a = -12$$

となりますね。つぎは左辺と右辺を -4 で割ると、

$$a = 3$$

となりますよね。これで謎の数 a を求めることができました。

問 58. 関数 $y = 2x^2$ で、 x が a から $a + 3$ へ変わるときの変化の割合は -6 であるとしたら a はいくつのはずなのか、以下の文のように考えることにしました。空欄に正しい数、式を記入しなさい。

a は a のままで変化の割合を求めてみることにしましょう。

まず、いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくることにします。そのために必要なことを計算してみます。

x は a から $a + 3$ へ変わるので 増えていますよね。

一方 y は から へ変わります。ですからどれだけ増えているか調べるためにひき算をしてみると、次のように、 y は、

$$\begin{aligned} 2(a+3)^2 - (2a^2) &= 2(a^2 + 6a + 9) - (2a^2) \\ &= \text{} \\ &= \text{} \end{aligned}$$

増えていることがわかります。

ですから、今調べたことを表にまとめると右のようになりますね。

というわけで、

$$\text{変化の割合} = \frac{12a + 18}{3} = \boxed{}$$

となりますよね。

ところでこの問題では、変化の割合は -6 になると書いてあるのですから今求めた $4a + 6$ と $\boxed{}$ は等しいはずです。つまり、

$$4a + 6 = -6$$

が成り立っているわけです。これで謎の数 a を発見するための式ができました。あとはこの式を解いて a の値を求めれば良いわけです。次のように計算をすすめることができます。まず、左辺と右辺から 6 をひくと、

$$4a + 6 - 6 = -6 - 6$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$4a = \boxed{}$$

となりますね。つぎは左辺と右辺を 4 で割ると、

$$a = \boxed{}$$

となりますよね。これで謎の数 a を求めることができました。

答えを見る

問 59. 次の問に答えなさい。

- (1) 関数 $y = ax^2$ で x が 1 から 4 へ変わるときの変化の割合は 10 であるという。 a の値を求めよ。
- (2) x が -3 から 2 へ変わるとき、2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = 2x + 5$ の変化の割合は

等しくなるという。 a の値を求めよ。

(3) 関数 $y = -2x^2$ で x が a から $a+1$ へ変わるときの変化の割合は2であるという。

a の値を求めよ。

答えを見る

2.7 関数 $y = ax^2$ のグラフと関数 $y = mx + n$ のグラフの交点を求めるには

私たちは、関数 $y = ax^2$ のグラフをつくると、放物線と呼ばれる曲線、つまり \cup のような形や、 \cap のような形の曲線ができるということを学びました。私たちはまた、1次関数 $y = mx + n$ のグラフをつくると必ず直線になるということをかなり昔に学んでいます。そうすると、1つの座標平面に関数 $y = ax^2$ のグラフと関数 $y = mx + n$ のグラフを描くと、それら2つのグラフは交わることがあるかもしれませんね。（もちろん交わらないこともあるかもしれません。）それでは、放物線と直線が交わっているとき、交わっている点の座標はどうすれば求められるのでしょうか。このことについてこれから考えることにします。しかし、その前にぜひ思い出してほしいことがあります。それは、関数のグラフの上には、その関数の式を満たす x と y を組にしてできる点 (x, y) がびっしりと全部並んでいるということです。（意味、わかりますよね。もしわからなければ、今すぐ49ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」をすべて復習してください。）念のため例を挙げることにしましょう。

例 21 関数 $y = x + 2$ のグラフの上には、 $y = x + 2$ という式を満たす x と y を組にしてできる点 (x, y) がびっしりと全部並んでいる。

どういうことか説明します。まずとりあえず、 $y = x + 2$ という式を満たす x と y の値を1組見つけてみましょう。 $y = x + 2$ という式を見ながら頭の中でちょこちょこっと計算すると、例えば、

$$x = 1, \quad y = 3$$

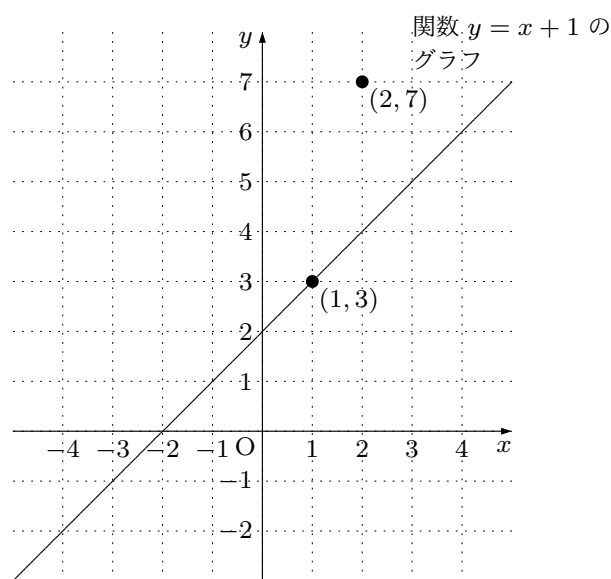
という x と y の値が見つかりますよね。「満たす」っていう言いまわしの意味がわからない人が結構いるので少し説明します。今見つけた x と y の値 $x = 1, y = 3$ ですが、ちゃんと $y = x + 2$ という式を満たしているんですよ。つまり、もし x が 1 で y が 3 だったら、 $y = x + 2$ という式の左辺の値と右辺の値は同じになるってということです。そういうとき数学では、「 $x = 1, y = 3$ は $y = x + 2$ という式を満たしている」なんて言うわけですよ。）

$y = x + 2$ という式を満たす x と y の値 $x = 1, y = 3$ が見つかったのでこの 2 つの数を組にして点 $(1, 3)$ を作ります。そうすると、この点 $(1, 3)$ は関数 $y = x + 2$ のグラフの上にあるはずなのです。なぜなら、そもそも関数のグラフは、その関数の式を満たしている x と y を組にしてできる点を全部見つけ、見つけた点をすべて座標平面に打っていくと出来上がるからです。ですから関数のグラフの作り方をしっかり理解している

人にとっては、点 $(1, 3)$ が関数 $y = x + 2$ のグラフの上にあるということはあたりまえのことなわけです。

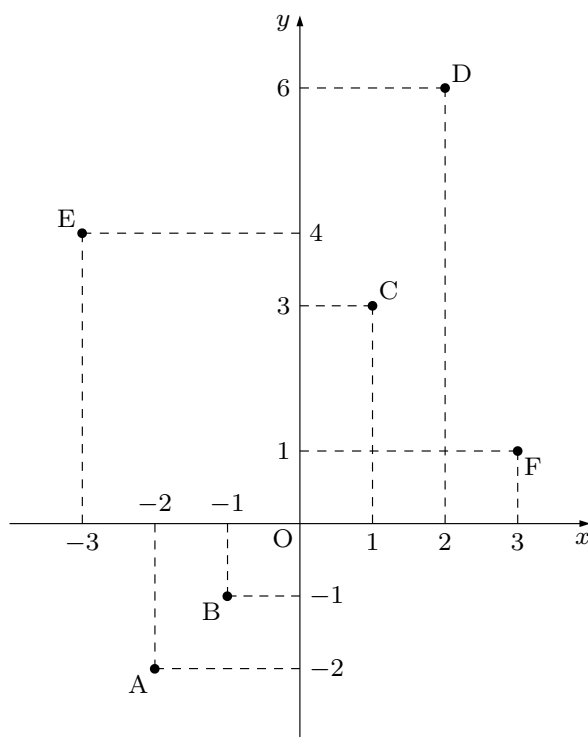
いま見つけた $x = 1, y = 3$ 以外にも、もちろんたくさん $y = x + 2$ という式を満たす x と y はあるわけです。そして $y = x + 2$ という式を満たす x と y を組にしてできる点がびっしりと全部集まって関数 $y = x + 2$ のグラフができあがっているのです。

ここまでの話がしっかり理解できた人は、ある点が関数 $y = x + 2$ のグラフの上にあるのかどうか、グラフを描かなくても計算で判定できるはずです。たとえば点 $(2, 7)$ が関数 $y = x + 2$ のグラフの上にあるのかどうか知りたければ、 x が 2 で y が 7 のとき $y = x + 2$ という式の右辺と左辺の値が等しくなるかどうか調べればよいわけですね。 x が 2 で y が 7 だったら $y = x + 2$ という式の右辺 $x + 2$ は 4 となり、左辺 y は 7 ですよ。ですから右辺と左辺は等しくなりませんよね。ということは、点 $(2, 7)$ は関数 $y = x + 2$ のグラ



フの上にはないと判断できるわけです。

問 60. 右の図の点 A、B、C、D、E、F のうち、関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にある点を全て選びなさい。ただし、関数 $y = 2x + 1$ のグラフを描いてはいけません。計算だけで判断して選びなさい。



答えを見る

問 61. グラフを描かないで関数 $y = -3x + 4$ のグラフのことを考えることにします。

(1) 次の点のうち、関数 $y = -3x + 4$ のグラフの上にある点をすべて選びなさい。

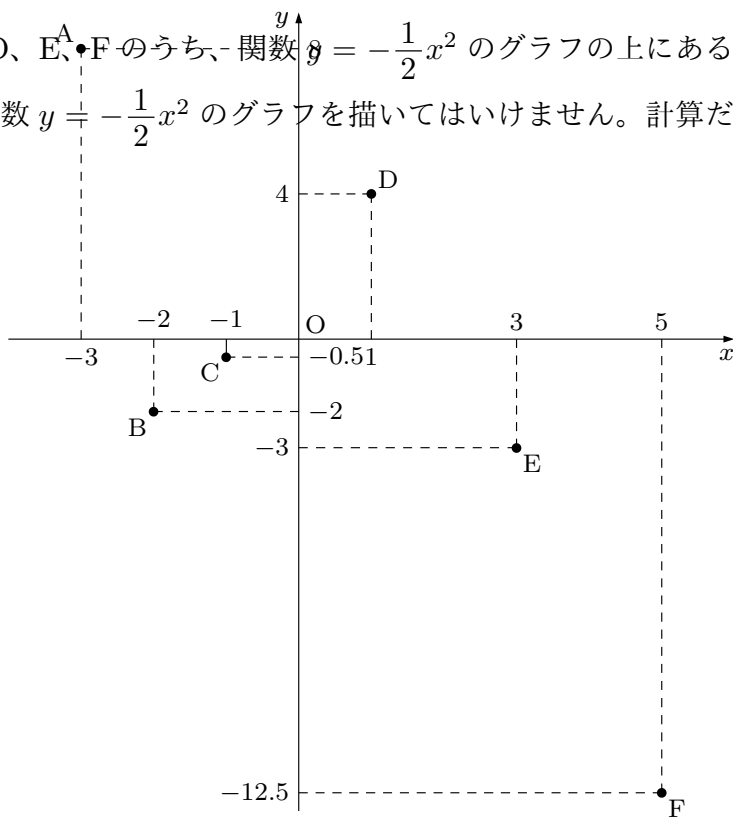
- | | | |
|-------------|-----------|-----------|
| ① A(-4, 16) | ② B(0, 3) | ③ C(0, 4) |
| ④ D(2, -2) | ⑤ E(2, 5) | ⑥ F(3, 8) |

(2) (1) の点 A、B、C、D、E、F 以外で、関数 $y = -3x + 4$ のグラフの上にある点を 2 つ見つけ座標を答えなさい。

答えを見る

ここまで 1 次関数を使って説明してきましたが、関数 $y = ax^2$ でも同じことがいえますね。つまり、たとえば、関数 $y = 2x^2$ のグラフの上には、 $y = 2x^2$ という式を満たす x と y を組にしてできる点がいっぱい並んでいるわけです。

問 62. 右の図の点 A、B、C、D、E、F のうち、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にある点を全て選びなさい。ただし、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描いてはいけません。計算だけで判断して選びなさい。



答えを見る

問 63. グラフを描かないで関数 $y = 2x^2$ のグラフのことを考えることにします。

- (1) 関数 $y = 2x^2$ のグラフの上にある点を 5 個見つけ、座標を答えなさい。
- (2) $y = 2x^2$ という式を満たす x と y の値の組を 5 組答えなさい。

答えを見る

では本題に入ることにしましょう。関数のグラフが 2 つあるとき、どうすれば 2 つのグラフの交点の座標を求められるのか考えるのでしたね。

例題 8 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 4$ のグラフについて以下の問に答えなさい。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 4$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。
- (2) (1) で2つのグラフが交わっていると答えた人のための問題です。交点の座標を答えなさい。

解答

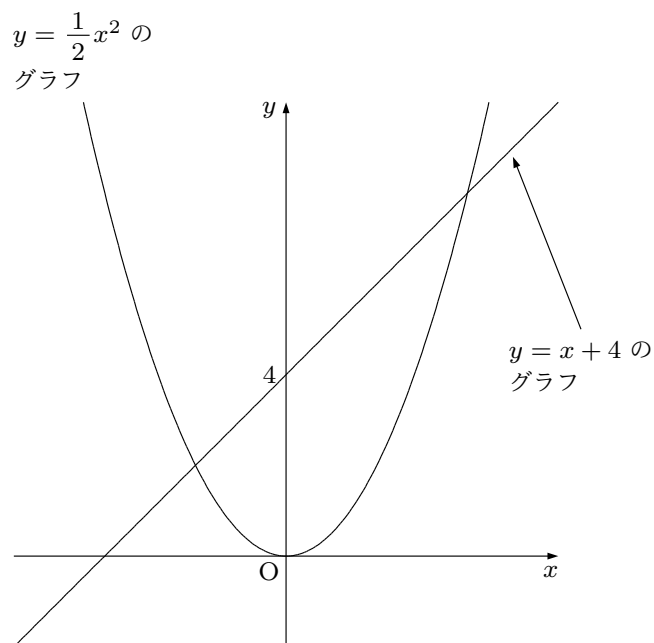
- (1) グラフの描き方は大丈夫ですよ。(忘れてしまった人は、今すぐ、49ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」をすべて復習してください。) この問題に出てくる2つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、簡単に、どうやってこの2つの関数のグラフを作ったのか説明しておきます。実を言うとこの2つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。

まず関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフですが、これはどうせ上に開いた放物線、つまり \cup のような形の曲線になるとい

うことを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = x + 4$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が4ですから y 軸上の点 $(0, 4)$ を通るという



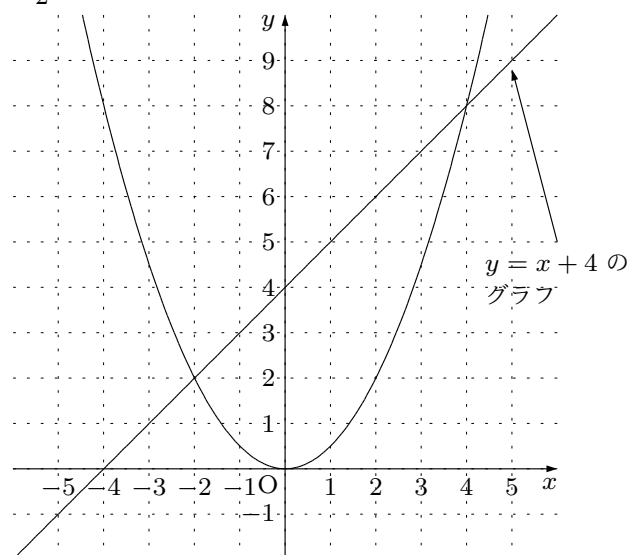
ことや、傾きが1ですから右へ1進むと上へ1進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは2つの点で交わっているようですね。

(2) 右の図を見てください。もしあなた

が方眼紙を使ったり、方眼紙は使わなくても目盛りを打ってとても正確にグラフを描いていたとしたら2つの交点の座標をすぐに読み取ることができるでしょう。この図を見れば、2つの交点の座標はそれぞれ $(-2, 2)$ と $(4, 8)$ であることがわかりますね。でも、このようにして交点の座標を求められたのはかなりラッキーなことと

$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ



いえます。いま、たまたまどちらの交点も「格子の上」に乗っていたからです。もし2つの交点が「格子の上」ではなく中途半端なところにあったら正確に座標を読み取ることはできないのです。そこでこれから、計算だけで交点を求める方法を学ぶことにします。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。

大切な物の見方

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 4$ のグラフの交点は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = x + 4$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = \frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = x + 4$ という式も満たしていることになります。だから交点

の座標を求めるには $y = \frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = x + 4$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = \frac{1}{2}x^2$ という式と $y = x + 4$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

ということかわかってもらえたでしょうか。昔、1次関数のことを学んだときに2つの直線の交点を求める話も学びましたね。そのときも今と全く同じ物の見方をしていたのですよ。覚えていますか？

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方程式は

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = x + 4 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。(説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。)

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $\frac{1}{2}x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $\frac{1}{2}x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$\frac{1}{2}x^2 = x + 4 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、③式はどうみても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右

辺から $x + 4$ をひくと、

$$\frac{1}{2}x^2 - (x + 4) = x + 4 - (x + 4)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に 2 をかけることにしましょう。すると、

$$2 \times \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \right) = 2 \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。

(因数分解が無理な場合は 2 次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の見かけをかえると、

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

となりますね。この式は $x - 4$ と $x + 2$ をかけると 0 になるという意味の式ですから、少なくとも $x - 4$ と $x + 2$ のうちどちらかは 0 であると判断できます。つまり、

$$x - 4 = 0, \quad \text{または} \quad x + 2 = 0$$

ということになります。

$$x - 4 = 0 \text{ の場合、} x = 4$$

となり、

$$x + 2 = 0 \text{ の場合、} x = -2$$

となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x = 4 \quad \text{または} \quad x = -2$$

ということになるわけです。

これで交点の x 座標が発見出来ました。2つの x の値が出てきたということは、交点は2つあるということを意味しています。

では次に、交点の y 座標を発見することにしましょう。 x の値が求められているので、①と②のうちのどちらか好きな方を使えば y の値が求められるわけです。

まず、 $x = 4$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y = 4 + 4 = 8$$

となりますね。ですから交点の座標は $(4, 8)$ ですね。

また、 $x = -2$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y = -2 + 4 = 2$$

となりますね。ですから交点の座標は $(-2, 2)$ ですね。

これで2つの交点の座標が発見出来ました。答えは、

$$(4, 8) \text{ と } (-2, 2)$$

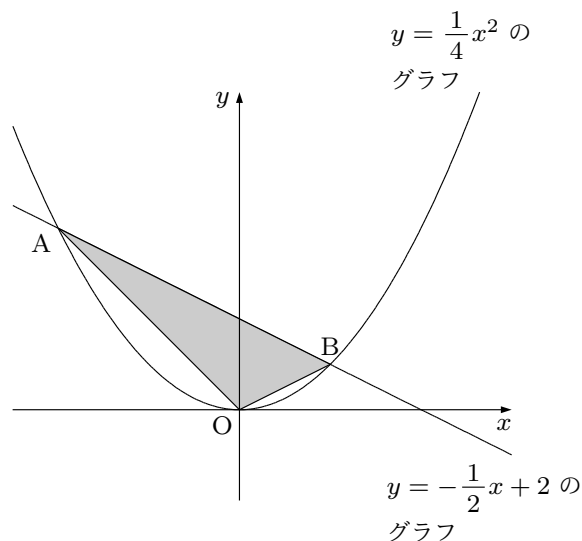
だったのです。

問 64. 以下の問に答えなさい。

- (1) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。
- (2) 関数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = x - 2$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。
- (3) 関数 $y = 3x^2$ のグラフと関数 $y = -3x + 6$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。
- (4) 関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -3x + 12$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。
- (5) 関数 $y = -x^2$ のグラフと関数 $y = 2x - 3$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。
- (6) 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 1$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。

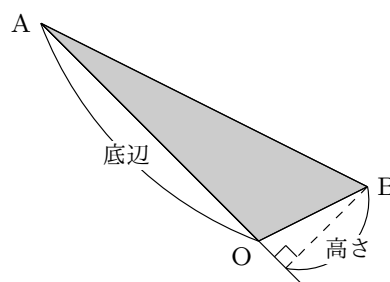
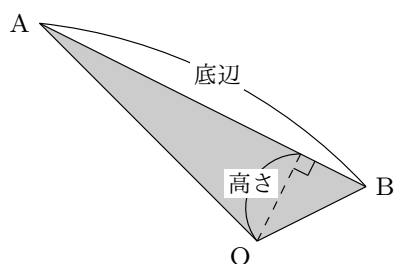
答えを見る

例題9 右の図のように、実は関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフと関数 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ のグラフは2つの点で交わります。ここでは2つの交点をそれぞれ、点A、点Bと称することにします。O、A、Bをくるとまっすぐ結ぶと $\triangle OAB$ ができますが、座標の1目盛りの長さを1cmと考えて、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



解答

まず。念のため確認しておきますが、三角形の面積ってどうやって計算するのですよね。たしか、「底辺の長さ」かける「高さ」かける「 $\frac{1}{2}$ 」って計算するんですよね。ですから、「底辺の長さ」や「高さ」がわからないと計算できないわけです。では、この問題の $\triangle OAB$ では、どこを「底辺」と考え、どこを「高さ」と考えればよいのでしょうか。次の2つの図をみてください。



これは $\triangle OAB$ だけを取り出して描いた図です。そしてこの2つの図には、どこを「底辺」と考え、どこを「高さ」と考えるのかアイデアが書いてあります。さて、この問題を解くには、「底辺」と「高さ」を左の図のように考えるのがよいのでしょうか。それとも右の図のように考えるのがよいのでしょうか。それとも、この2つの図とは違う考え方をすべきでしょうか。このようなことを悩まなくてはいけないのですが、ここでちょっと

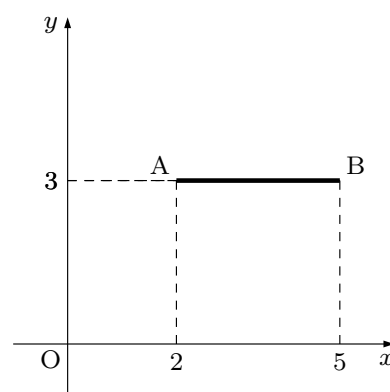
たちどまってよく考えてほしいことがあります。

x 軸や y 軸が出てくる話では、水平な向き（つまり横の向き）や垂直な向き（つまり縦の向き）の長さだったら気楽に求めることができます。だって、 x 軸や y 軸の目盛りを活用すればよいわけですから。しかし、斜めの線の長さは気楽に求めることができません。（実は、斜めの線の長さを求めるための奥の手もあるのですがここでは触れないでおきます。） どういうことなのかいくつか例を紹介しましょう。

まず右の図を見てください。点 $A(2, 3)$ と点 $B(5, 3)$ を結ぶ線分 AB がありますが、この線分 AB は水平な向きの線分です。ですから、この線分 AB の長さは x 軸の目盛りを使えば気楽に求めることができます。この線分の長さをひき算を使って計算すると、

$$\text{線分 } AB \text{ の長さ} = 5 - 2 = 3$$

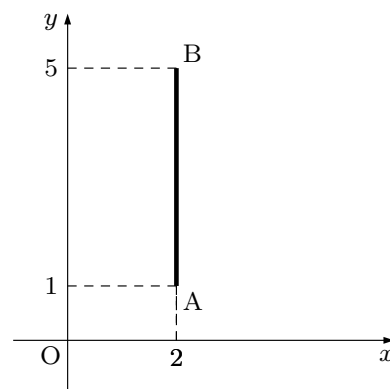
となりますね。



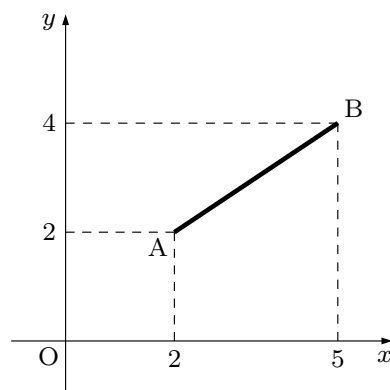
次は右の図を見てください。点 $A(2, 1)$ と点 $B(2, 5)$ を結ぶ線分 AB がありますが、この線分 AB は垂直な向きの線分です。ですから、この線分 AB の長さは y 軸の目盛りを使えば気楽に求めることができます。この線分の長さをひき算を使って計算すると、

$$\text{線分 } AB \text{ の長さ} = 5 - 1 = 4$$

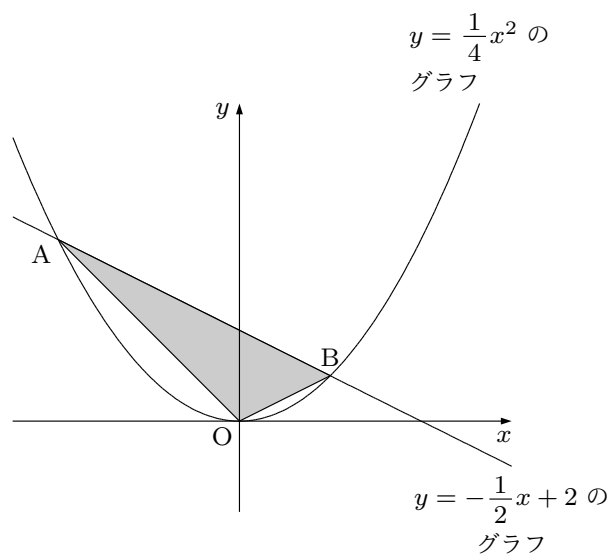
となりますね。



最後に右の図を見てください。点 $A(2, 2)$ と点 $B(5, 4)$ を結ぶ線分 AB がありますが、この線分 AB は斜めの向きの線分です。ですから、この線分 AB の長さは x 軸の目盛りや y 軸の目盛りを使うだけでは気楽に求めることはできません。



このようなことを考えに入れると、 x 軸や y 軸が出てくる話では、なるべく斜めの長さは使わないで水平方向の長さや垂直方向の長さを使って問題を解くほうが良いということになります。では、この問題の $\triangle OAB$ の面積を水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って求めるにはどうすればよいのでしょうか。もう一度この問題の図を右に描いておきます。 $\triangle OAB$ の辺はどれも「斜め」ですよね。ということは、この図のままでは水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って面積を求めるなんて無理です。なにか工夫をしなくてはいいけません。どうしましょうか。では考えてください。5分待ちます。



.....

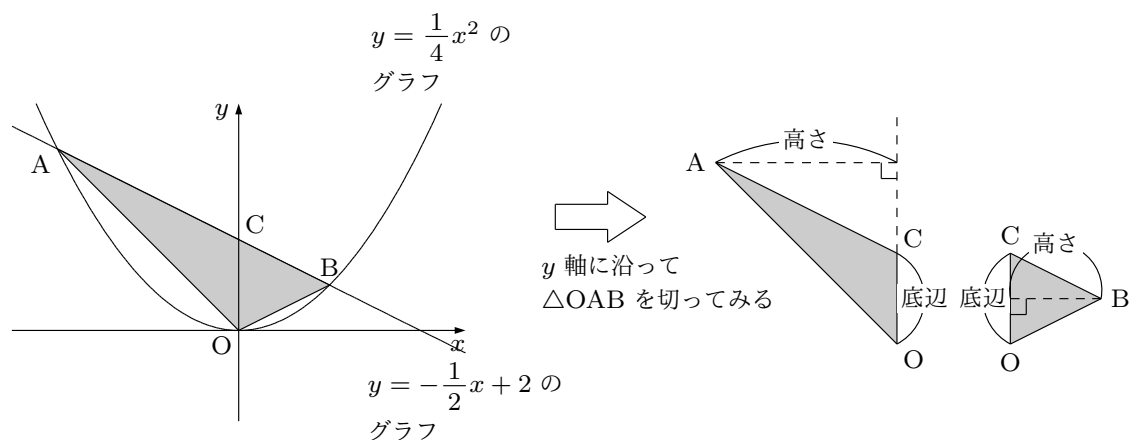
.....

.....

.....

.....

はい、5分たちました。なにかよい考えは出ましたか？実は、次の図のように $\triangle OAB$ を y 軸に沿って2つの三角形に分けて考えるとよいのです。

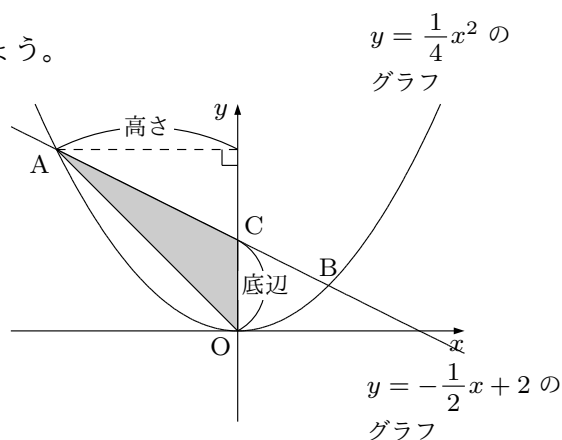


この図をよく見てください。図の右側には $\triangle OAB$ を2つに分けてできた三角形が2枚できています。 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ です。この2つの三角形について、「底辺」や「高さ」を図のように考えることにすれば、水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って面積を求めることができますね。では、面積の計算にとりかかりましょう。

まず、 $\triangle OAC$ の面積を求めることにしましょう。

右の図を見てください。

底辺の長さを求めるには点 C の場所がわかればよいですね。点 C は関数 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ のグラフと y 軸の交点です。つまり、関数 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ の切片になっているところです。関数 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ の



切片はこの式を見れば2であることがすぐにわかりますね。(どういうことなのかよくわからない人は、今すぐ「関数2」のテキストを探して1次関数を全て復習してください。) ですから、点 C のところには2と書いてあるはずですよ。よって、底辺の長さは2であることがわかりました。

次に、高さを求めることにします。そのためには点 A の場所がわかればよいですね。点 A は関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフと関数 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ のグラフの交点ですよ。ところで、交点の座標の求め方は例題8で詳しく学習しましたよね。そうです、連立方程式を解

くのでしたね。解くべき連立方程式はもちろん、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。では、この連立方程式を解いていきましょう。

まず、①の左辺の y と右辺の $\frac{1}{4}x^2$ は同じものです。また①の y と②の y は同じものです。ですから、②の y を $\frac{1}{4}x^2$ に取り替えることができます。すると、

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 2$$

となりますね。これで謎の文字が1つだけの方程式ができました。この方程式はどう見ても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔、たくさん練習しましたね。ではこの2次方程式を解いて謎の数 x を発見することにしましょう。まず、左辺と右辺から $-\frac{1}{2}x + 2$ をひくと、

$$\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x + 2 - \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$$

となりますが、かっこを外して仲間の部品をまとめ、見かけをマシにすると、

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺と右辺に4をかけてみます。すると、

$$4 \times \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) = 4 \times 0$$

となりますが、かっこを外したりして見かけをマシにすると、

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

となりますね。。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。(因数分解が無理な場合は2次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の見かけをかえると、

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

となりますね。この式は $x + 4$ と $x - 2$ をかけると 0 になるという意味の式ですから、少なくとも $x + 4$ と $x - 2$ のうちどちらかは 0 であると判断できます。つまり、

$$x + 4 = 0 \quad \text{または} \quad x - 2 = 0$$

ということになります。ということは

$$x + 4 = 0 \text{ の場合、} x = -4$$

となり、

$$x - 2 = 0 \text{ の場合、} x = 2$$

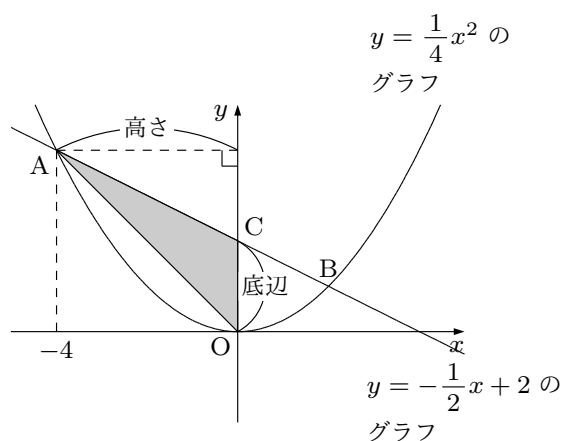
となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x = -4 \quad \text{または} \quad x = 2$$

ということになるわけです。

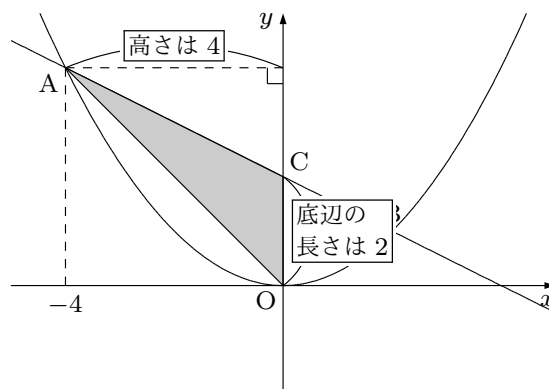
これで交点の x 座標が発見出来ました。2 つの x の値が出てきたということは、交点は 2 つあるということを意味しています。ここでちょっと立ち止まって考えてみると、いま私たちが知りたいと思っている点 A ですが、図をみるとわかるように、この点は 2 つある交点のうち x 座標がマイナスになっている点ですよね。ということは点 A の x 座標は（ではなく） -4 ということになりますね。（点 B の x 座標が 2 ということになりますね。）

では次に、交点 A の y 座標を発見することにしましょう。と、一瞬思いましたがよく考えるとそこまでする必要はありませんね。右の図を見てください。そもそも何のために点 A の座標を知りたかったのかというと、 $\triangle OAC$ の高さを知りたいからですよね。で



も、点 A の x 座標さえわかればそれだけで十分 $\triangle OAC$ の高さはわかっていきますよね。
 点 A の x 座標が -4 だということは、この図を見ればわかるように $\triangle OAC$ の高さは 4 ということになりますよね。(高さは -4 じゃないんですよ。高さは普通マイナスにはなりませんから。)

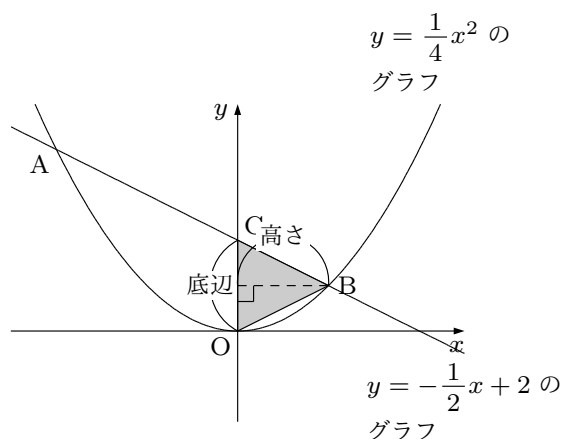
ここまでの調査で $\triangle OAC$ の底辺の長さ
 と高さがわかりました。調査結果を右の図
 にまとめておきます。これで $\triangle OAC$ の面積
 を求める準備ができましたね。では $\triangle OAC$
 の面積を求めることにします。三角形の面
 積は「 $\frac{1}{2}$ 」かける「底辺の長さ」かける「高
 さ」で求められるのですから、



$$\triangle OAC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4 (\text{cm}^2)$$

となりますね。

右の図を見てください。 $\triangle OAC$ の面積が
 求められたので今度は $\triangle OBC$ の面積を求
 めるわけですが、 $\triangle OAC$ のときと同じよう
 にして求めることができるのであなたにま
 かせることにします。では求めてみてくだ
 さい。5分待ちます。



.....

.....

.....

.....

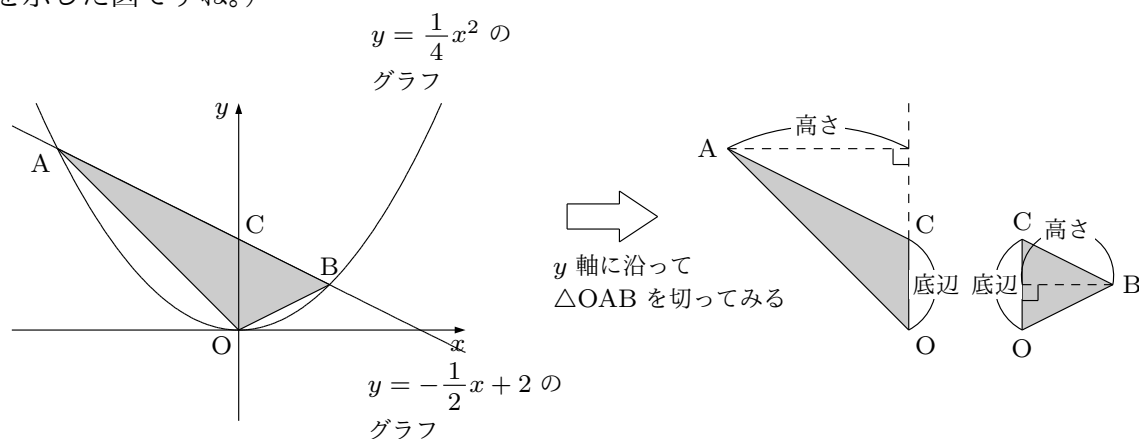
.....

はい 5 分たちました。この三角形の底辺の長さは 2 で、高さは 2 ですよね。（底辺の長さは点 C の場所からわかり、高さは点 B の x 座標からわかるのですよね。）ですから、

$$\triangle OBC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 (\text{cm}^2)$$

となりますね。

では最後に次の図を見てください。（これは前にお見せした「この問題を解くアイデア」を示した図ですね。）

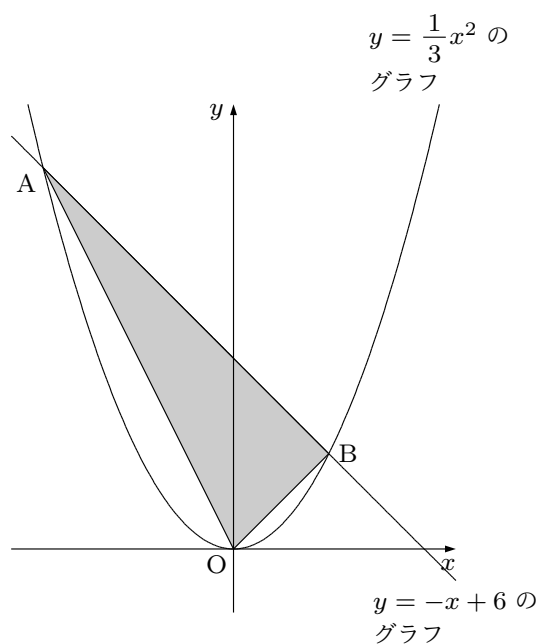


私たちはこれまでに、 $\triangle OAC$ を分割してできた 2 つの三角形 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ の面積を求めてあります。 $\triangle OAC$ の面積は $4 (\text{cm}^2)$ で $\triangle OBC$ の面積は $2 (\text{cm}^2)$ でしたね。ですから、

$$\triangle OAB \text{ の面積} = \triangle OAC \text{ の面積} + \triangle OBC \text{ の面積} = 4 + 2 = 6 (\text{cm}^2)$$

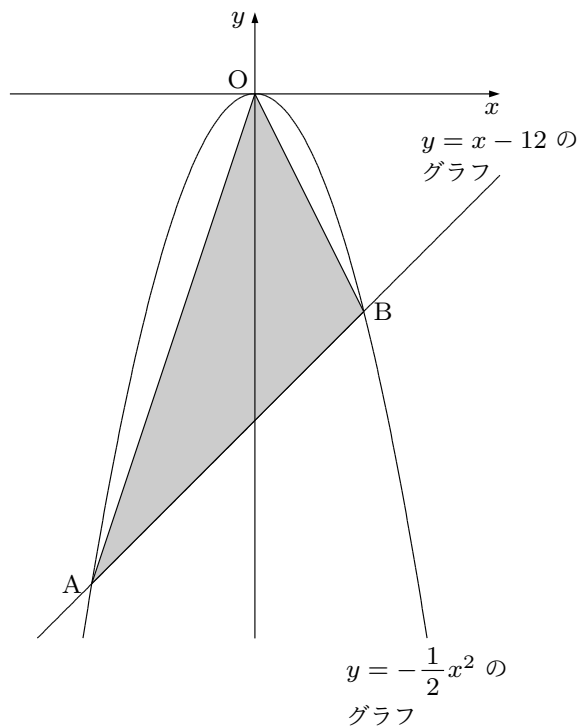
となります。これでこの問題は解決しました。

問 65. 右の図のように、実は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフと関数 $y = -x + 6$ のグラフは2つの点で交わります。ここでは2つの交点をそれぞれ、点 A、点 B と呼ぶことにします。O、A、B をまっすぐ結ぶと $\triangle OAB$ ができますが、座標の1目盛りの長さを1cm と考えて、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



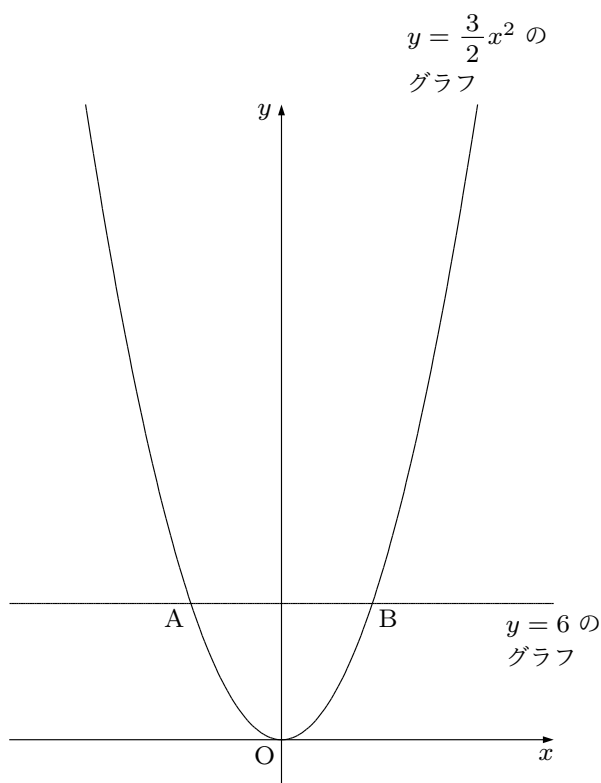
答えを見る

問 66. 右の図のように、実は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x - 12$ のグラフは2つの点で交わります。ここでは2つの交点をそれぞれ、点 A、点 B と呼ぶことにします。O、A、B をまっすぐ結ぶと $\triangle OAB$ ができますが、座標の1目盛りの長さを1cm と考えて、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



答えを見る

問 67. 右の図のように、実は関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = 6$ のグラフは 2 つの点で交わります。ここでは 2 つの交点をそれぞれ、点 A、点 B と呼ぶことにします。また、この図のは描かれていませんが、関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフ上にあり x 座標が -4 である点を C と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。ただし、座標の 1 目盛りの長さを 1 cm と考えることにします。



- (1) 点 C の座標を求めなさい。
- (2) 点 C を図に打ちなさい。
- (3) A、B、C をくるとまっすぐ結

ぶと $\triangle ABC$ ができます。 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

答えを見る

問の解答

問 1. 「入り口から入れた数を 2 倍して出口から出す」という「決まり」なのですから入り口から $-\frac{7}{4}$ を入れると

$$\text{出口から } -\frac{7}{2} \text{ が出てくる}$$

ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 2. 「入り口から入れた数を 2 乗してさらに 3 倍して出口から出す」という「決まり」なのですから入り口から -3 を入れると

$$(-3)^2 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

となるので

$$\text{出口から } 27 \text{ が出てくる}$$

ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 3. この解答では入り口から入れる数を x という文字であらわし、出口から出る数を y という文字であらわすことにします。

(1) 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひいた数を出口から出す」という決まりは

$$y = 3x + 5$$

という式であらわすことができます。

- (2) 「入口から入れた数を $-\frac{1}{2}$ 倍してさらに $\frac{3}{2}$ をたした数を出口から出す」という決まりは

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

という式であらわすことができます。

- (3) 「入口から入れた数を 2 乗してさらに -1 倍した数を出口から出す」という決まりは

$$y = -x^2$$

という式であらわすことができます。

- (4) 「入口から入れた数を 2 乗してさらに $\frac{1}{3}$ をかけた数を出口から出す」という決まりは

$$y = \frac{1}{3}x^2$$

という式であらわすことができます。

[本文へ戻る](#)

問 4. 関数の決まりを言葉で言う問題でした。

- (1) $y = -4x - 1$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を -4 倍してさらに 1 をひいた数を出口から出す

ということです。

- (2) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を $\frac{3}{4}$ 倍してさらに $\frac{1}{2}$ をたした数を出口から出す

ということです。

- (3) $y = \frac{1}{4}x^2$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を 2 乗してさらに $\frac{1}{4}$ をかけた数を出口から出す

ということです。

- (4) $y = -3x^2$ という式で表されている決まりを言葉で言うと

入口から入れた数を2乗してさらに-3をかけた数を出口から出す
ということです。

[本文へ戻る](#)

問 5. $y = 2x - 1$ という数式で表されている関数では、入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

[本文へ戻る](#)

問 6. $y = 2x^2$ という数式で表されている関数では、入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	32	18	2	0	2	18	32

[本文へ戻る](#)

問 7. $y = 2x - 3$ という数式で表されている関数について考える問題でした。

- (1) 入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-11	-9	-7	-5	-3	-1	1

- (2) 入口から、 $x = -4$ 、 $x = -3.5$ 、 $x = -3$ 、 $x = -2.5$ 、 $x = -2$ 、 $x = -1.5$ 、 $x = -1$ 、 $x = 0.5$ 、 $x = 0$ 、 $x = 0.5$ 、 $x = 1$ 、 $x = 1.5$ 、 $x = 2$ を入れたとき、出口から出てくる y という数は次の表のようになります。

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

- (3) 関数 $y = 2x - 3$ で、もし、入口から入れる x という数を -4 以上 2 以下の「ありとあらゆる」全ての数にすると、

出口から出てくる y という数は、 -11 以上 1 以下の「ありとあらゆる数」になると思われます。

[本文へ戻る](#)

問 8.

- (1) 関数 $y = -3x + 2$ で x の値を $1 \leq x \leq 5$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	1	2	3	4	5
y	-1	-4	-7	-10	-13

この表の y の段を見てみると、 -1 、 -4 、 -7 、 -10 、 -13 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $1 \leq x \leq 5$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	-1	-2.5	-4	-5.5	-7	-8.5	-10	-11.5	-13

この表の y の段を見てみると、 -1 、 -2.5 、 -4 、 -5.5 、 -7 、 -8.5 、 -10 、 -11.5 、 -13 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、 -13 から -1 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $1 \leq x \leq 5$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$-13 \leq y \leq -1$$

であることが悟れるでしょう。

- (2) $y = 2x - 7$ で x の値を $-3 \leq x \leq 1$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1
y	-13	-11	-9	-7	-5

この表の y の段を見てみると、-13、-11、-9、-7、-5 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-3 \leq x \leq 1$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1
y	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5

この表の y の段を見てみると、-13、-12、-11、-10、-9、-8、-7、-6、-5 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、-13 から -5 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-3 \leq x \leq 1$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$-13 \leq y \leq -5$$

であることが悟れるでしょう。

- (3) $y = x^2$ で x の値を $1 \leq x \leq 4$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

この表の y の段を見てみると、1、4、9、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $1 \leq x \leq 4$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。す

ると次の表のようになります。

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16

この表の y の段を見てみると、1、2.25、4、6.25、9、12.25、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、1 から 16 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $1 \leq x \leq 4$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$1 \leq x \leq 16$$

であることが悟れるでしょう。

- (4) $y = x^2$ で x の値を $-3 \leq x \leq 2$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4

この表の y の段を見てみると、0、1、4、9 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-3 \leq x \leq 2$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4

この表の y の段を見てみると、0、0.25、1、2.25、4、6.25、9 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、0 から 9 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-3 \leq x \leq 2$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y の変域は

$$0 \leq x \leq 9$$

であることが悟れるでしょう。

- (5) $y = x^2$ で x の値を $-4 \leq x \leq 4$ の範囲で、例えば 1 きざみで変えて y の値を調べると次の表のようになります。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

この表の y の段を見てみると、0、1、4、9、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

この調査だけでは心配なので、今度は x の値を $-4 \leq x \leq 4$ の範囲で x の値をもっと細かく変化させて、例えば 0.5 きざみで変えて y の値を調べることにします。すると次の表のようになります。(横に長くなるので途中で分けてあります。)

x	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0
y	16	12.25	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0

	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16

この表の y の段を見てみると、0、0.25、1、2.25、4、6.25、9、12.25、16 という数は出口から出てくることがあるということがわかります。

ここまでの調査をみると、どうも、0 から 16 までの数が出口から出てくるようです。

さらに x の値を $-4 \leq x \leq 4$ の範囲でもっともっと細かく変化させ調べたらどうなるのか想像してください。そうすると、出口から出てくる y の値の範囲、つまり y

の変域は

$$0 \leq x \leq 16$$

であることが悟れるでしょう。

[本文へ戻る](#)

問 9. 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、 $y = 3x - 5$ ですね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をしてします。そして、「 x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

- (1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">-2</div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">4</div>
y		

- (2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、 $y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{初めに出てくる } y \text{ は } \boxed{-11}$$

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

$$\text{次に出てくる } y \text{ は } \boxed{7}$$

ですね。つまり、先に $\boxed{-11}$ が出てきて、後に $\boxed{7}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	-2	4
y	-11	7
	先に出てきた y	あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{4} - (\boxed{-2}) = \boxed{6}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x	あとに入れた x
x	-2	4
y	-11	7
	先に出てきた y	あとに出てきた y

$\boxed{6}$ 増えている
 $\cdots \cdots \cdots \rightarrow$

- (4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{7} - (\boxed{-11}) = \boxed{18}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11→	7
	↑	18 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

x は 6 増え、 y は 18 増える

ということがわかりました。

本文へ戻る

問 10.

- (1) 関数 $y = 2x + 5$ で、 x を -1 から 5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-1→	5
y	3→	15
	↑	12 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 6 増えていて、そのとき y は 12 増えている

ということになります。

- (2) 関数 $y = -3x + 2$ で、 x を -5 から -2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	3 増えている	↓
x	-5→	-2
y	17→	8
	↑	9 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 3 増えている、そのとき y は 9 増えている

ということになります。

- (3) 関数 $y = x^2$ で、 x を 1 から -4 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	5 減っている	↓
x	1→	-4
y	1→	16
	↑	15 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 5 減っていて、そのとき y は 15 増えている

ということになります。

- (4) 関数 $y = x^2$ で、 x を 4 から 1 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	3 減っている	↓
x	4→	1
y	16→	1
	↑	15 減っている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 3 減っていて、そのとき y は 15 減っている

ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 11.

- (1) 関数 $y = 2x - 1$ で、 x を -3 から -5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	4 減っている	↓
x	-3→	-7
y	-5→	-11
	↑	6 減っている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -3 増えている、そのとき y は -6 増えている

ということになります。

- (2) 関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ で、 x を 4 から -6 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	10 減っている	↓
x	4→	-6
y	5→	0
	↑	5 減っている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -10 増えている、そのとき y は -5 増えている

ということになります。

- (3) 関数 $y = 3x^2$ で、 x を -3 から -1 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	-3→	-1
y	27→	3
	↑	24 減っている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は 2 増えている、そのとき y は -24 増えている

ということになります。

- (4) 関数 $y = 3x^2$ で、 x を -1 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	-1 2 減っている	-3
y	3 24 増えている	27
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、この問題の答えは

x は -2 増えている、そのとき y は 24 増えている

ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 12. 「入口から入れた数を 3 倍してさらに 5 をひく」という「決まり」の関数について考えることにします。数式では、 $y = 3x - 5$ ですね。この関数で、入口から、初め -2 を入れ、次に 4 を入れる場合の話をしてします。そして、「 x はどれだけ増えるのかまたは減るのか」、またそのとき「 y はどれだけ増えるのか減るのか」を調べることにします

- (1) 初め入口から $x = -2$ を入れ、次に入口から $x = 4$ を入れるのでしたね。今考えたことを、この後のために、次のような表を作ってまとめておくことにします。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	-2		4
y			

- (2) 出口から出てくる y がいくつになるのか調べます。この関数は、 $y = 3x - 5$ という数式で表される関数でしたね。

初め入口に $x = -2$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

初めに出てくる y は $\boxed{-11}$

ですね。

次は、入口から $x = 4$ を入れるのですから、 $y = 3x - 5$ という数式を使って計算してみると、

次に出てくる y は $\boxed{7}$

ですね。つまり、先に $\boxed{-11}$ が出てきて、後に $\boxed{7}$ が出てくるわけです。今、考えたことを、さっき作った表に追加しておきましょう。次のようになりますね。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓		↓
x	-2		4
<hr/>			
y	$\boxed{-11}$		$\boxed{7}$
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

- (3) 先に入れた x は -2 でした。あとから入れた x は 4 でした。後から入れた x は先に入れた x よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{4} - (\boxed{-2}) = \boxed{6}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	$\boxed{6}$ 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11		7
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

- (4) 先に出てきた y は -11 でした。あとから出てきた y は 7 でしたね。後から出てきた y は先に出たきた y よりどれだけ増えているか調べましょう。そのためには、ひきざんをすれば良いですね。つまり、

$$\boxed{7} - (\boxed{-11}) = \boxed{18}$$

増えているということがわかるわけですね。このことも表に追加して書いておきましょう。すると次のようになりますね。すると次のような表が完成します。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-2→	4
y	-11→	7
	↑	$\boxed{18}$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

以上の調査で、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるとき

$$x \text{ は } \boxed{6} \text{ 増え、} y \text{ は } \boxed{18} \text{ 増える}$$

ということがわかりました。ということは、関数 $y = 3x - 5$ では、入口から入れる x の値を -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は

$$\frac{\boxed{18}}{\boxed{6}} = \boxed{3}$$

ということになりますね。

[本文へ戻る](#)

問 13.

- (1) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 1 から 5 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	4 増えている	↓
x	1→	5
y	1→	-7
	↑	-8 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 4 増えている、そのとき y は -8 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-8}{4} = 2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 3$ で x を 1 から 5 へ変える場合、変化の割合は 2 である

ということになります。

- (2) 関数 $y = -2x + 3$ で x を -3 から -6 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	-3 増えている	↓
x	-3→	-6
y	9→	15
	↑	6 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は -3 増えている、そのとき y は 6 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{6}{-3} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 3$ で x を -3 から -6 へ変える場合、変化の割合は -2 である
ということになります。

- (3) 関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	1 増えている	↓
x	2→	3
y	↑	-2 増えている	↑
	-1→	-3
	↑		↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 1 増えている、そのとき y は -2 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-2}{1} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 3$ で x を 2 から 3 へ変える場合、変化の割合は -2 である
ということになります。

- (4) 関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	5→	7
y	-3→	-7
	↑	-4 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 2 増えている、そのとき y は -4 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-4}{2} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x + 7$ で x を 5 から 7 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

- (5) 関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	-5 増えている	↓
x	3→	-2
y	-10→	0
	↑	10 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は -5 増えている、そのとき y は 10 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{10}{-5} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x - 4$ で x を 3 から -2 へ変える場合、変化の割合は -2 である
ということになります。

- (6) 関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	1→	3
y	-2→	-18
	↑	-16 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 2 増えている、そのとき y は -16 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-16}{2} = -8$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を 1 から 3 へ変える場合、変化の割合は -8 である
ということになります。

- (7) 関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	3 増えている	↓
x	-1→	2
y	-2→	-8
	↑	-6 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 3 増えている、そのとき y は -6 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-6}{3} = -2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を -1 から 2 へ変える場合、変化の割合は -2 である

ということになります。

- (8) 関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	-5 増えている	↓
x	2→	-3
y	-8→	-18
	↑	-10 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は -5 増えている、そのとき y は -10 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{-10}{-5} = 2$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = -2x^2$ で x を 2 から -3 へ変える場合、変化の割合は 10 である

ということになります。

- (9) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	3 増えている	↓
x	0→	3
y	0→	3
	↑	3 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

というわけで、

x は 3 増えている、そのとき y は 3 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

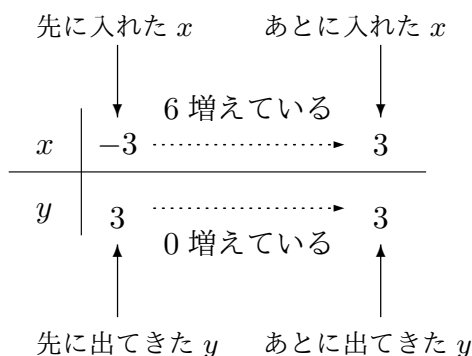
$$\frac{3}{3} = 1$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を 0 から 3 へ変える場合、変化の割合は 1 である

ということになります。

- (10) 関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を 3 から -3 へ変える場合、出口から出てくる y の値を計算して表にまとめると次のようになります。



というわけで、

x は 6 増えている、そのとき y は 0 増えている

ということがわかりました。ですから、変化の割合を求めてみると

$$\frac{0}{6} = 0$$

となります。つまりこの問題の答えは、

関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ で x を -3 から 3 へ変える場合、変化の割合は 0 である

ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 14. $y = -2x + 3$ という数式で表される関数では、入口から入れる x の値として -3 、 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 、 3 を入れると出口から出てくる y の値は次の表のようになります。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

[本文へ戻る](#)

問 15. $y = -2x + 3$ という数式で表される関数について、「関数の表」を見て y の値がどのように変化していくのか考える問題でした。

(1) 「関数の表」

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

の y の段を見るとわかるように、

$y = -2x + 3$ では、 x の値が増えるにつれて、 y の値はだんだん減っていく。

(2) 「関数の表」

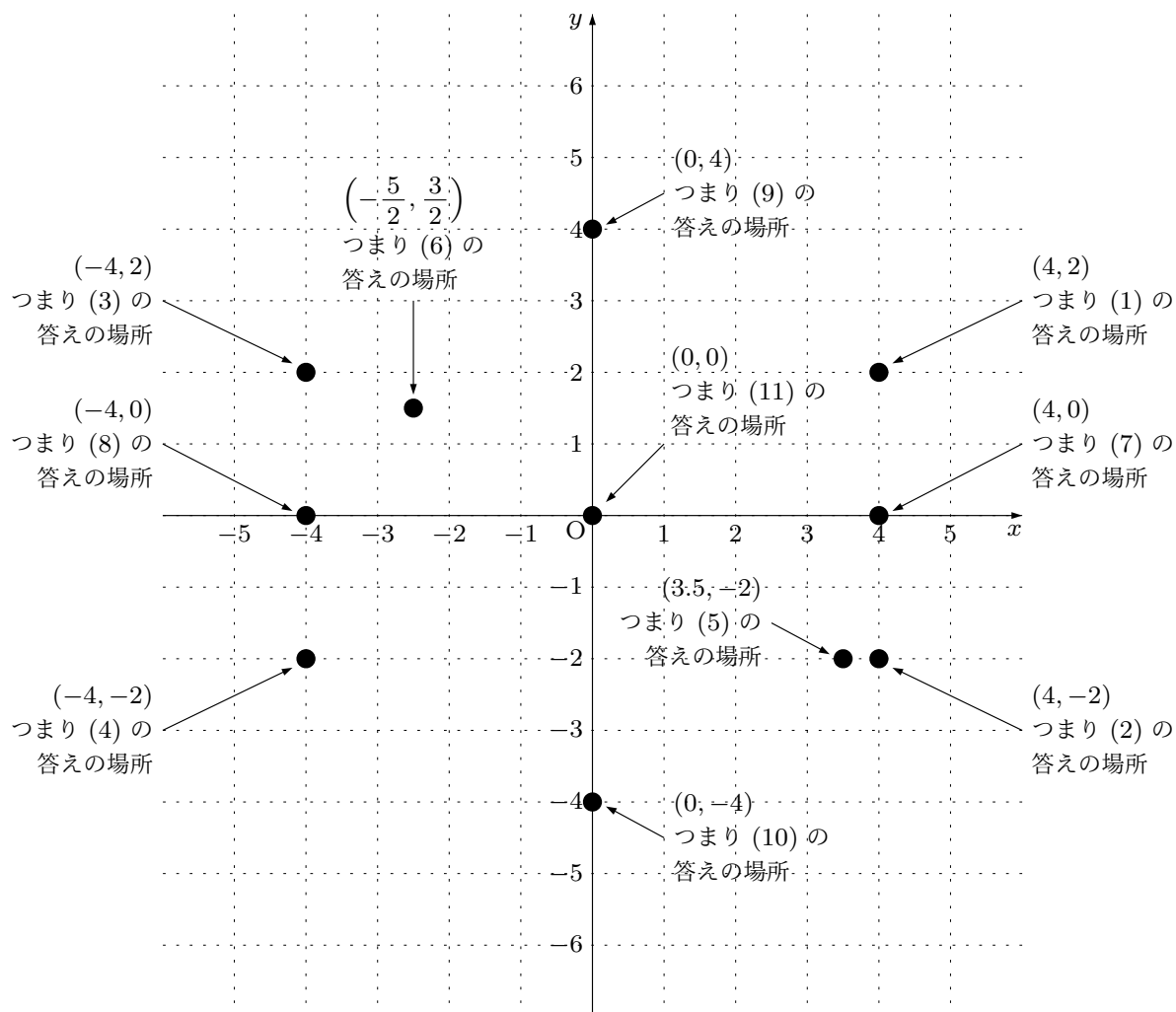
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	-1	-3

の y の段を見るとわかるように、

$y = -2x + 3$ では、 x の値がとにかく 1 増えると、 y の値は 2 減るようである。

[本文へ戻る](#)

問 16. 座標平面の上に点を打つ問題でした。

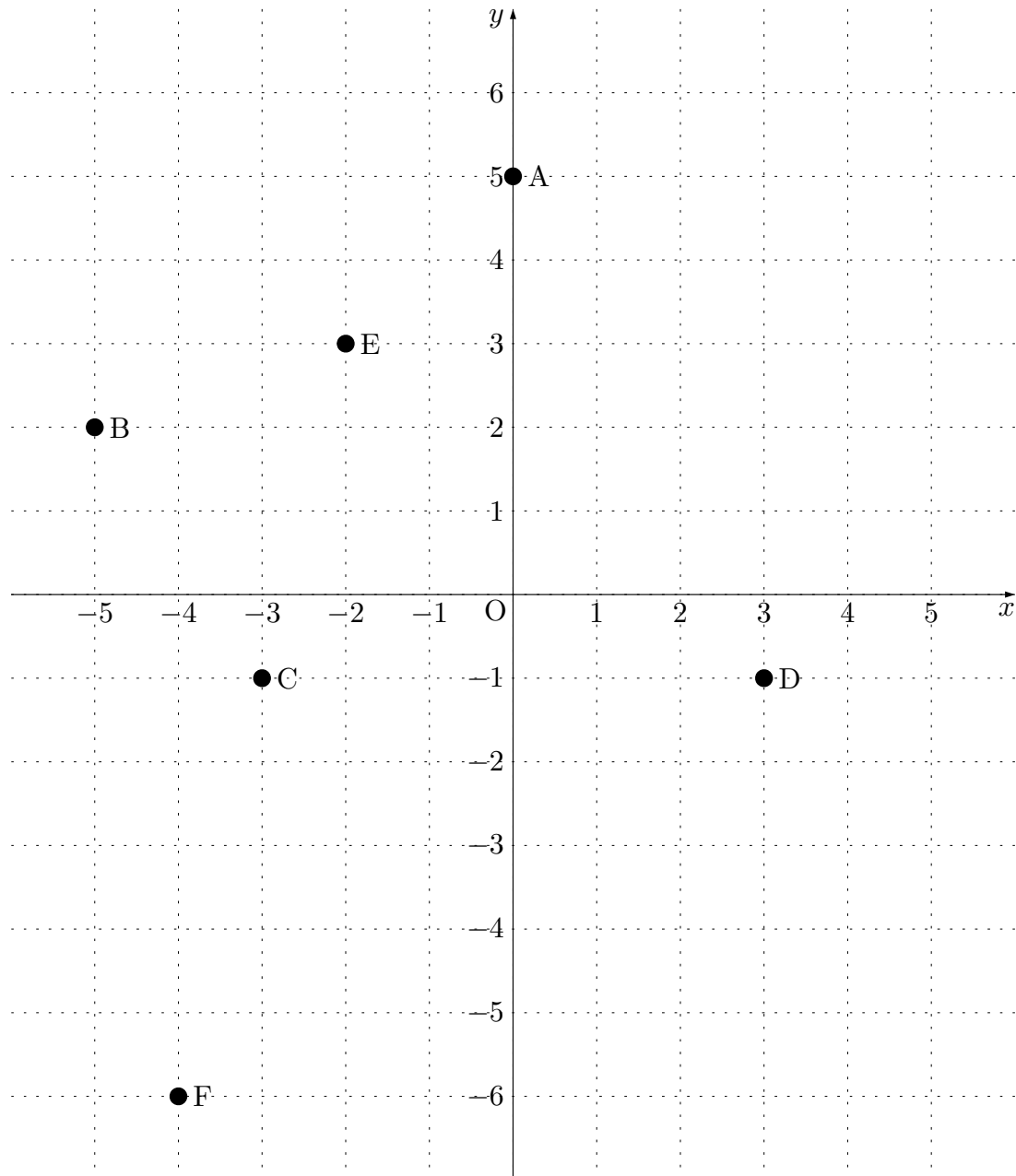


[本文へ戻る](#)

問 17. 座標平面上に点を打つ問題でした。

- | | | |
|----------------|----------------|-----------------|
| (1) $A(0, 5)$ | (2) $B(-5, 2)$ | (3) $C(-3, -1)$ |
| (4) $D(3, -1)$ | (5) $E(-2, 3)$ | (6) $F(-4, -6)$ |

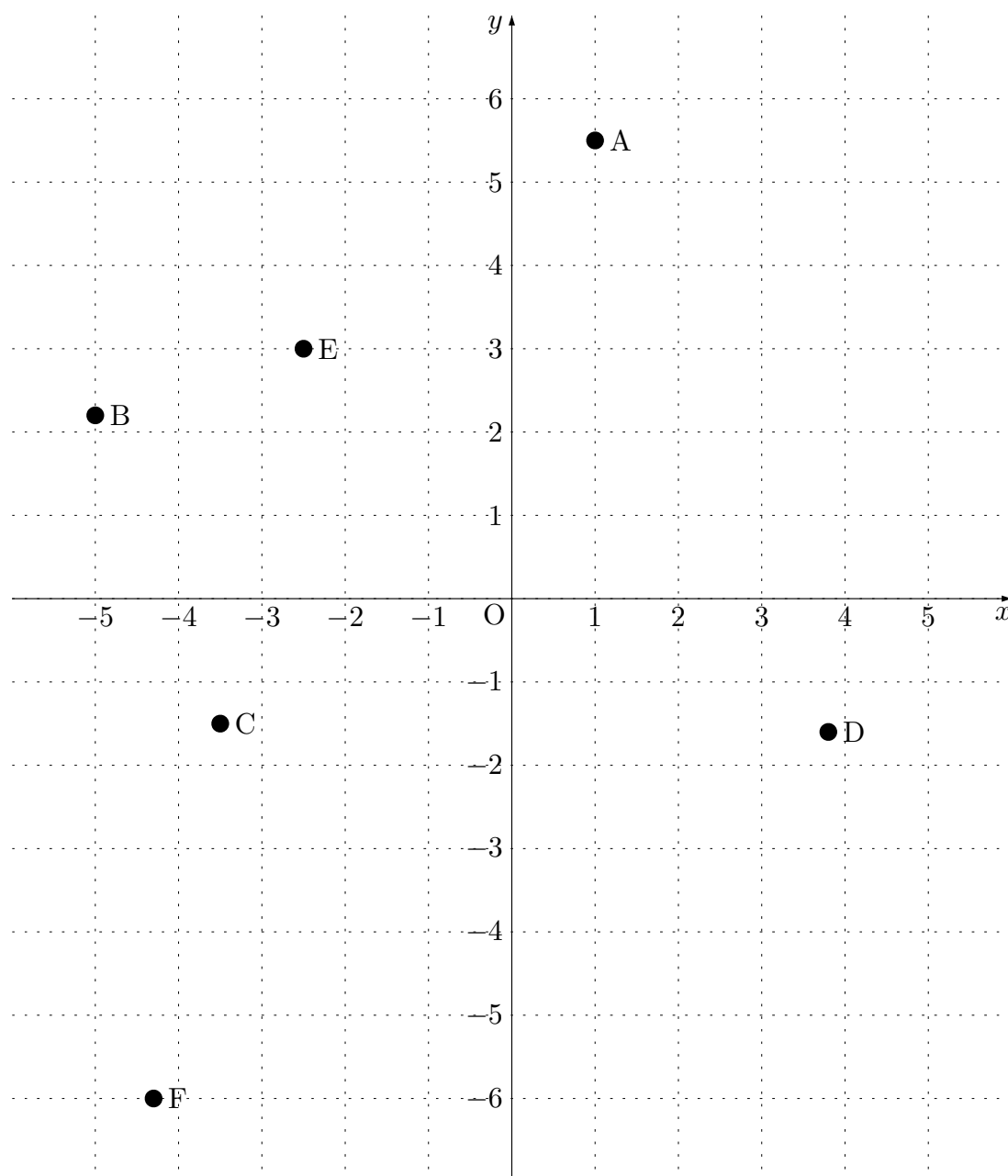
の場所は以下のとおりです。



問 18. 座標平面上に点を打つ問題でした。

- | | | |
|--------------------|------------------|---------------------|
| (1) $A(1, 5.5)$ | (2) $B(-5, 2.2)$ | (3) $C(-3.5, -1.5)$ |
| (4) $D(3.8, -1.6)$ | (5) $E(-2.5, 3)$ | (6) $F(-4.3, -6)$ |

の場所は以下のとおりです。



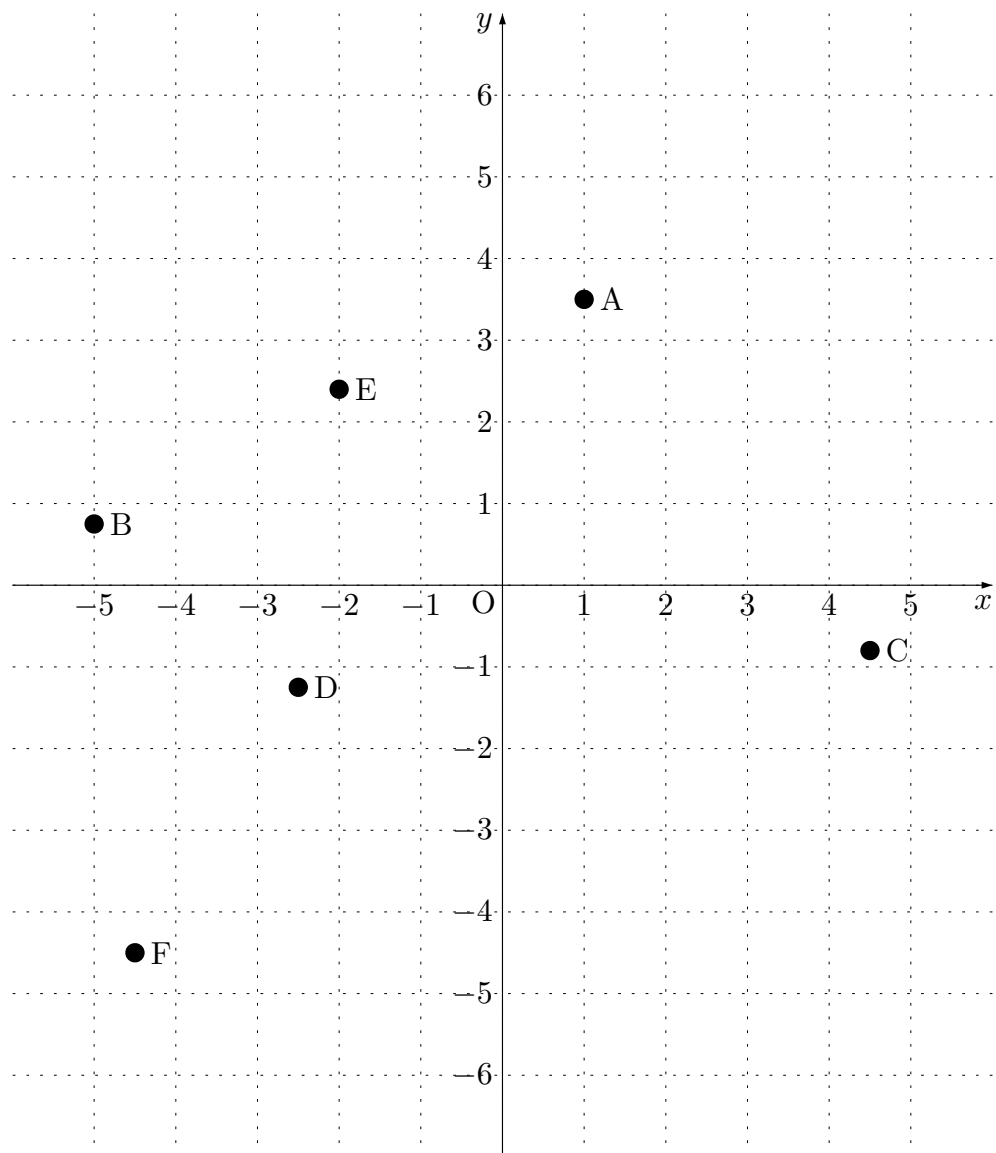
問 19. 座標平面に点を打つ問題でした。

- | | | |
|--|--------------------------------------|---|
| (1) $A\left(1, \frac{7}{2}\right)$ | (2) $B\left(-5, \frac{3}{4}\right)$ | (3) $C\left(\frac{9}{2}, -\frac{4}{5}\right)$ |
| (4) $D\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ | (5) $E\left(-2, \frac{12}{5}\right)$ | (6) $F\left(-4.5, -\frac{9}{2}\right)$ |

というそれぞれ点の座標を小数であらわすと

- | | | |
|----------------------|-------------------|---------------------|
| (1) $A(1, 3.5)$ | (2) $B(-5, 0.75)$ | (3) $C(4.5, -0.8)$ |
| (4) $D(-2.5, -1.25)$ | (5) $E(-2, 2.4)$ | (6) $F(-4.5, -4.5)$ |

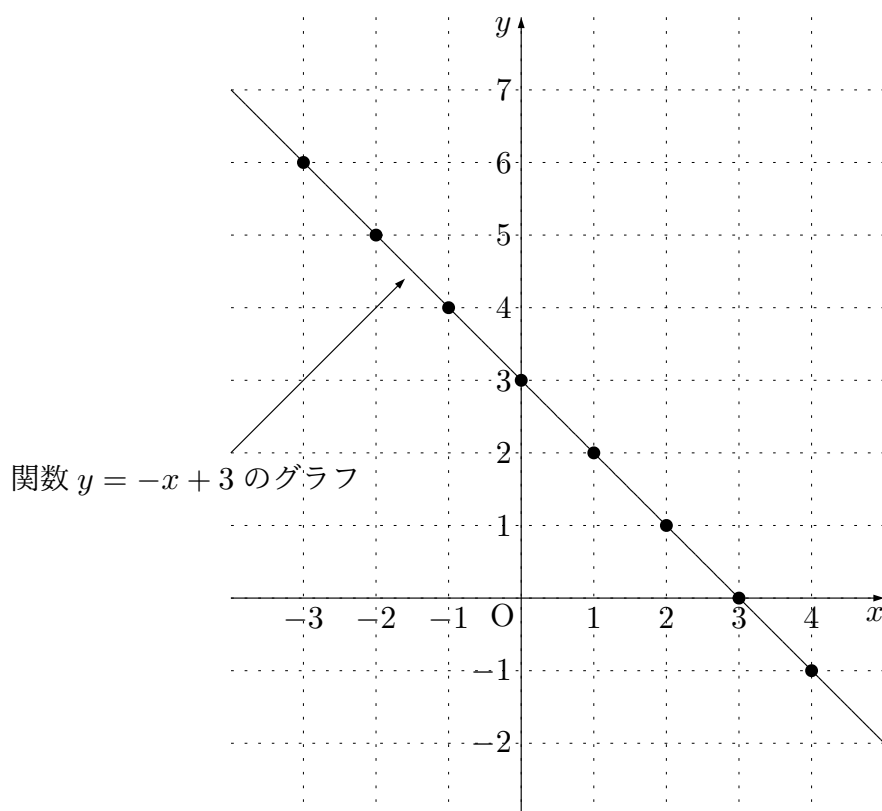
となります。よってこれらの点の場所は以下のとおりです。



問 20. x の範囲を -3 から 4 までにして、 x の値を 1 きざみで変えて調べると、「関数 $y = -x + 3$ の表」は次のようになります。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	6	5	4	3	2	1	0	-1	...

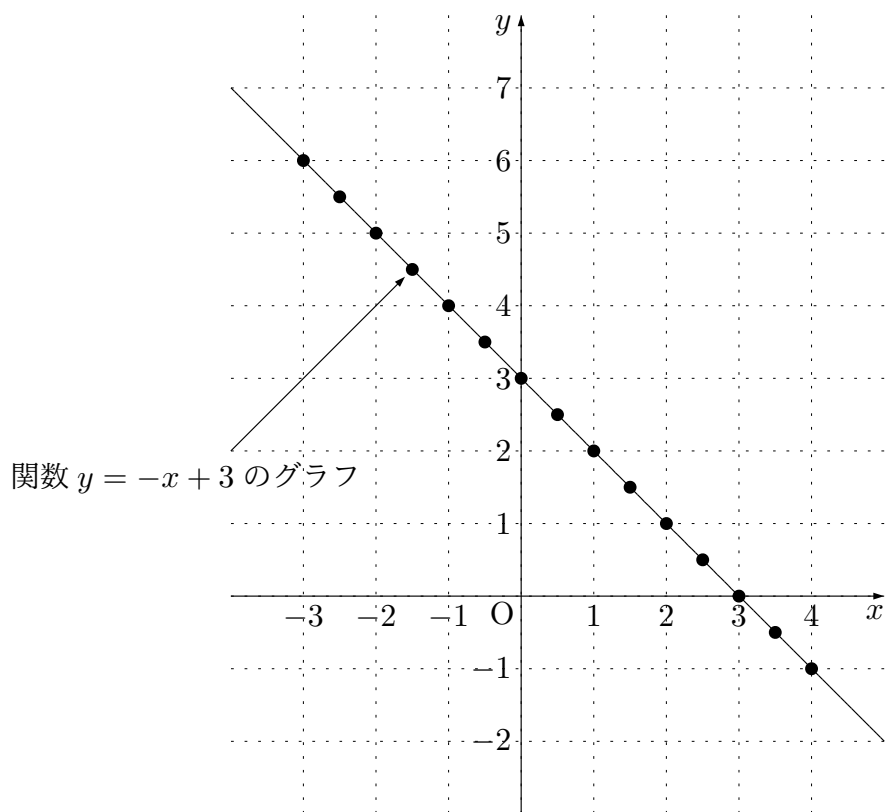
そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y = -x + 3$ のグラフ」は次のようになります。



問 21. x の範囲を -3 から 4 までにして、 x の値を 0.5 きざみで変えて調べると、「関数 $y = -x + 3$ の表」は次のようになります。

x	...	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	...
y	...	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0	-0.5	-1	...

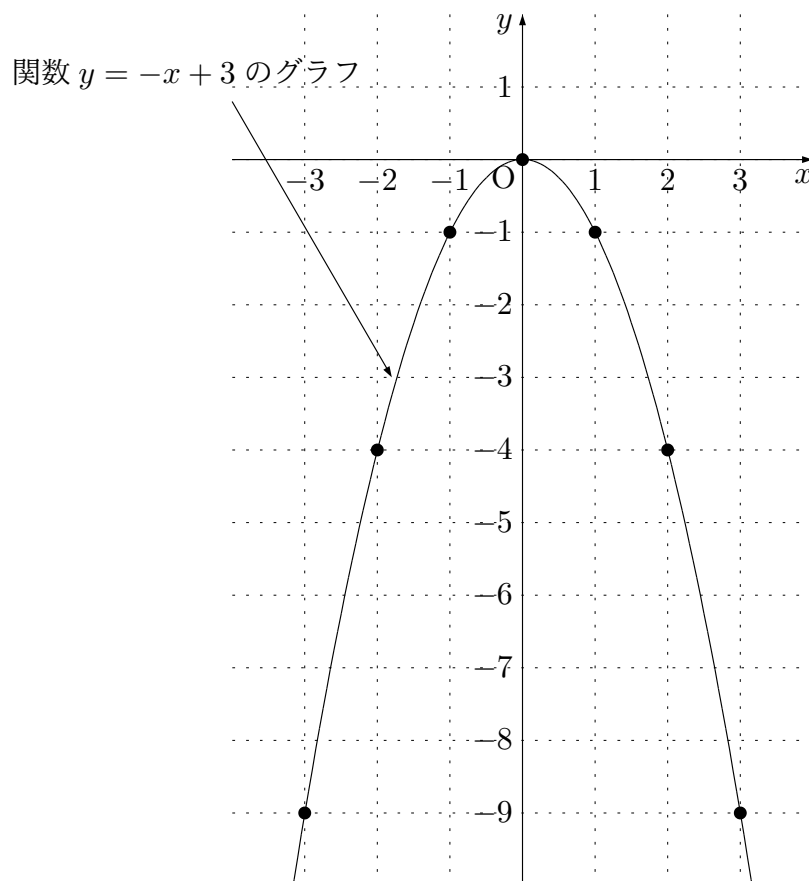
そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y = -x + 3$ のグラフ」は次のようになります。



問 22. x の範囲を -3 から 4 までにして、 x の値を 1 きざみで変えて調べると、「関数 $y = -x^2$ の表」は次のようになります。

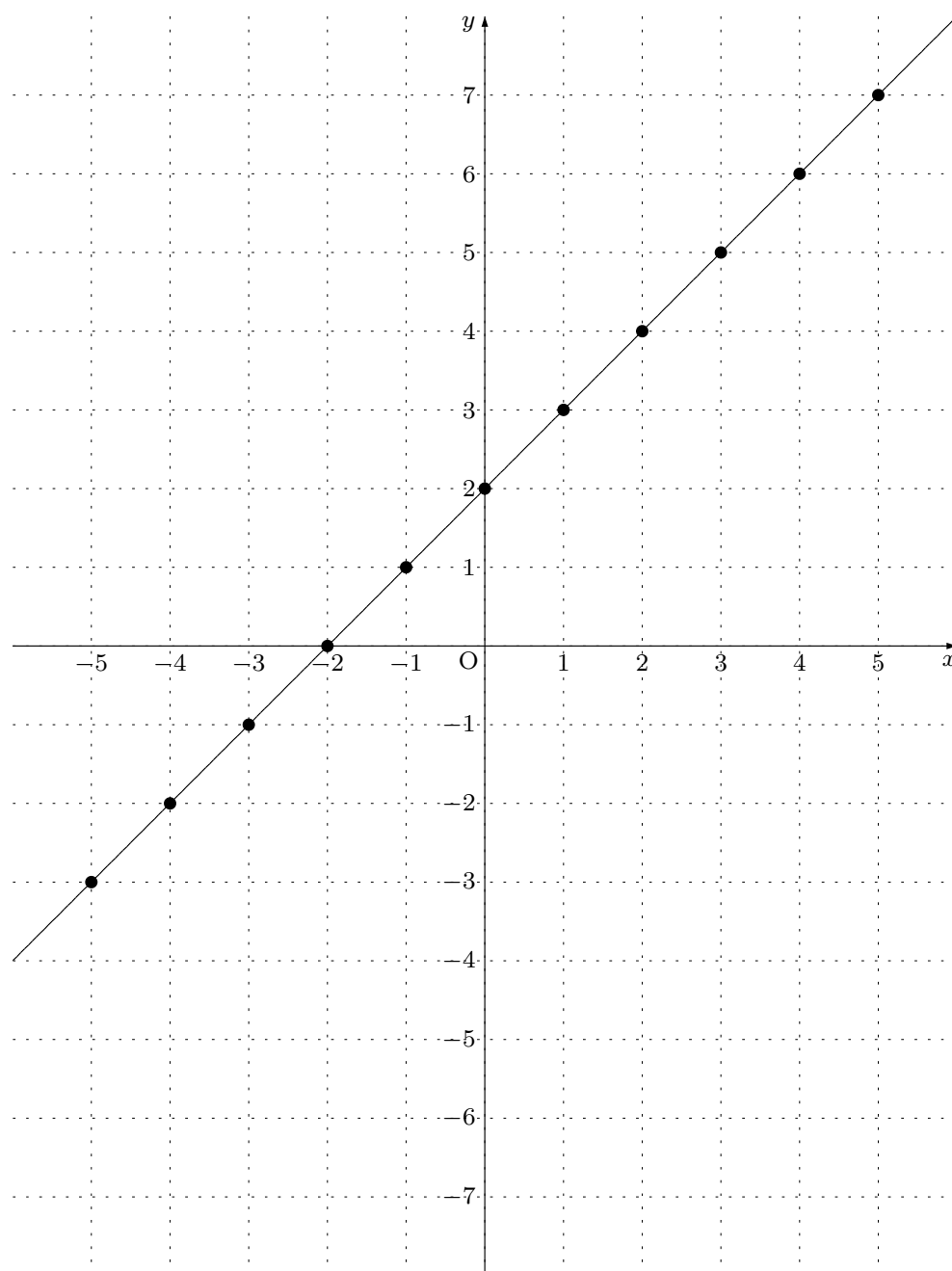
x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

そしてこの表を見ながら点を打ち、最後に点たちの間を本当らしく結んでいくと、「関数 $y = -x + 3$ のグラフ」は次のようになります。

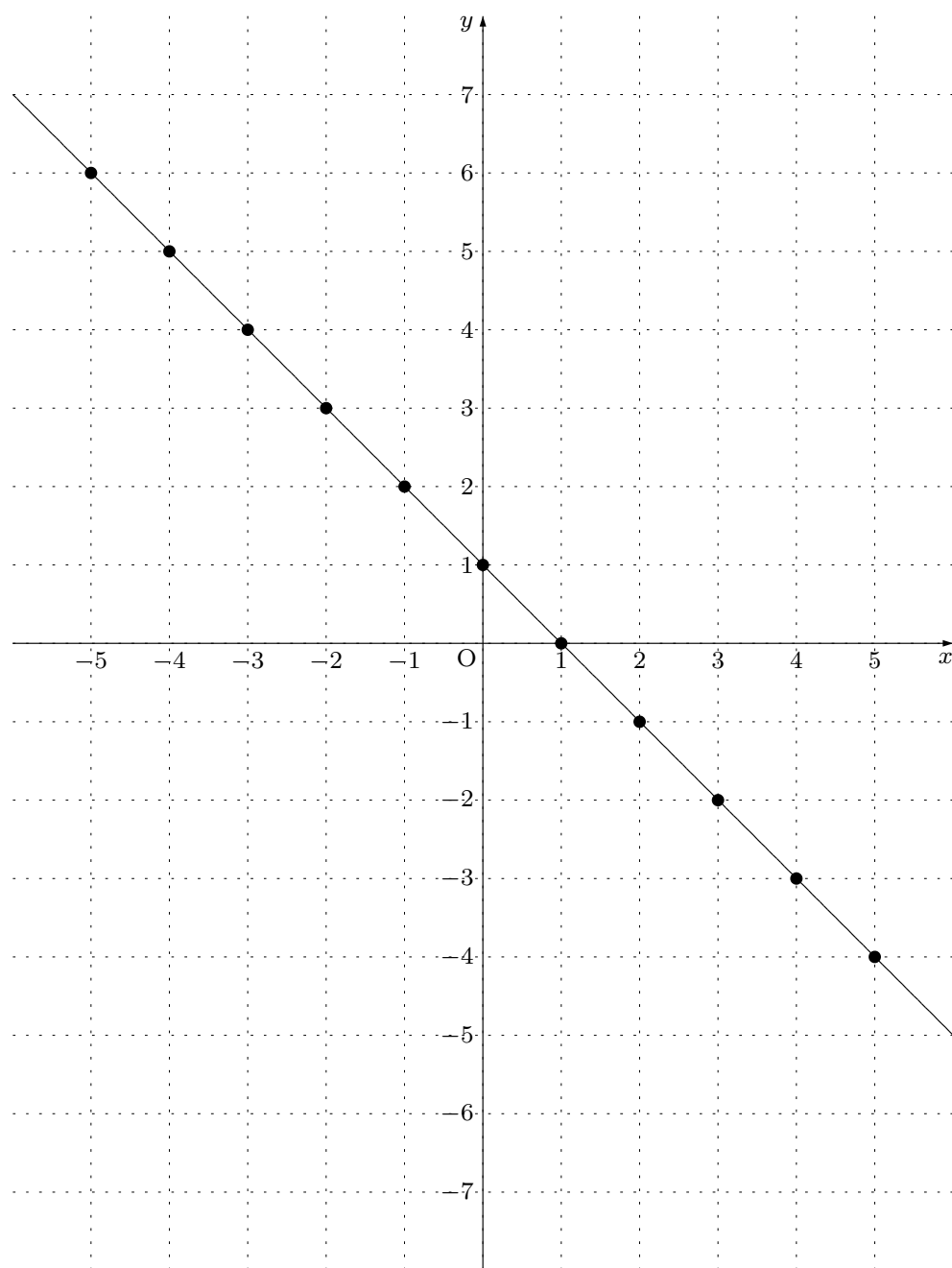


問 23. 関数のグラフを作る問題でした。

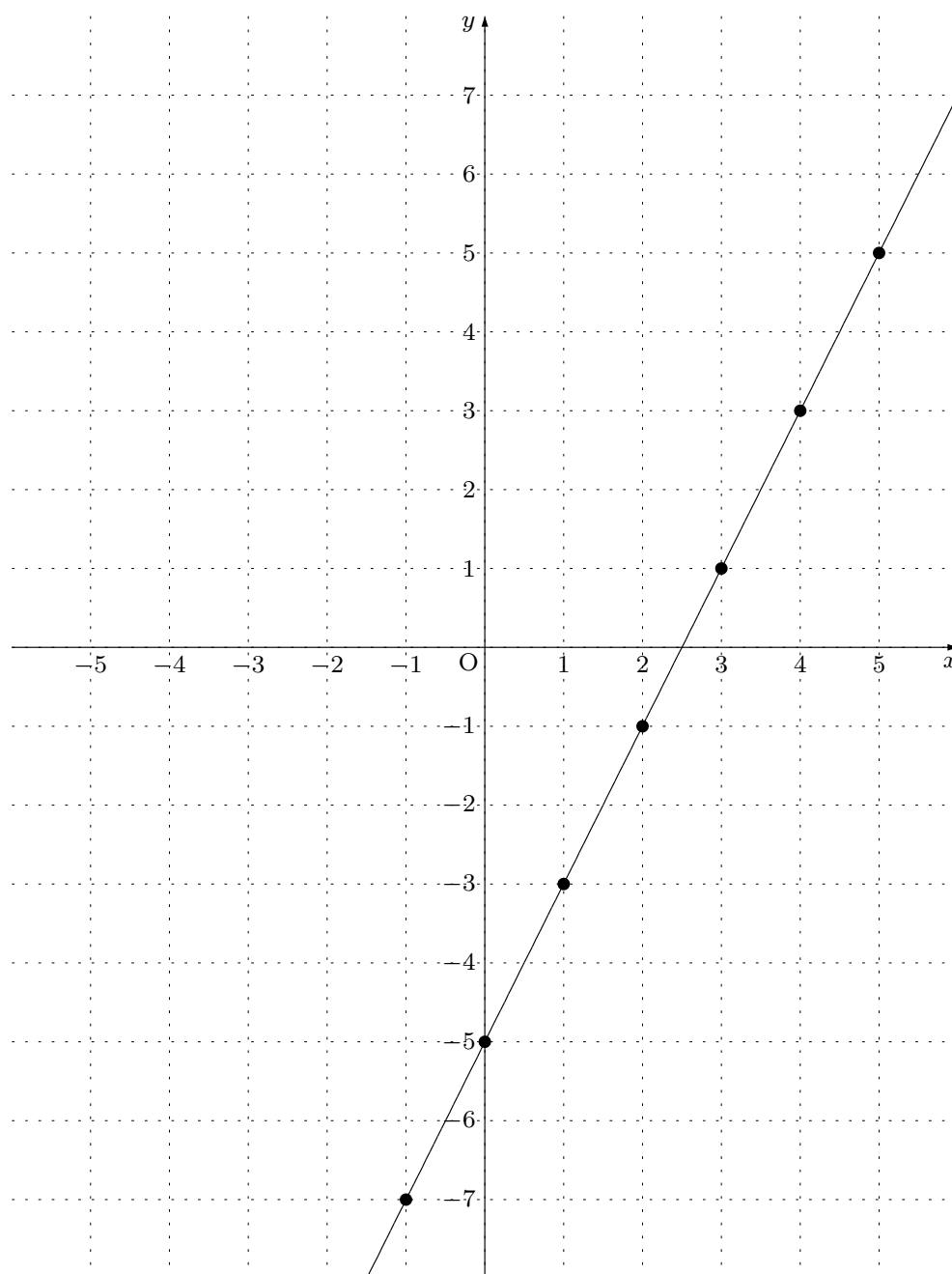
(1) 関数 $y = x + 2$ のグラフ



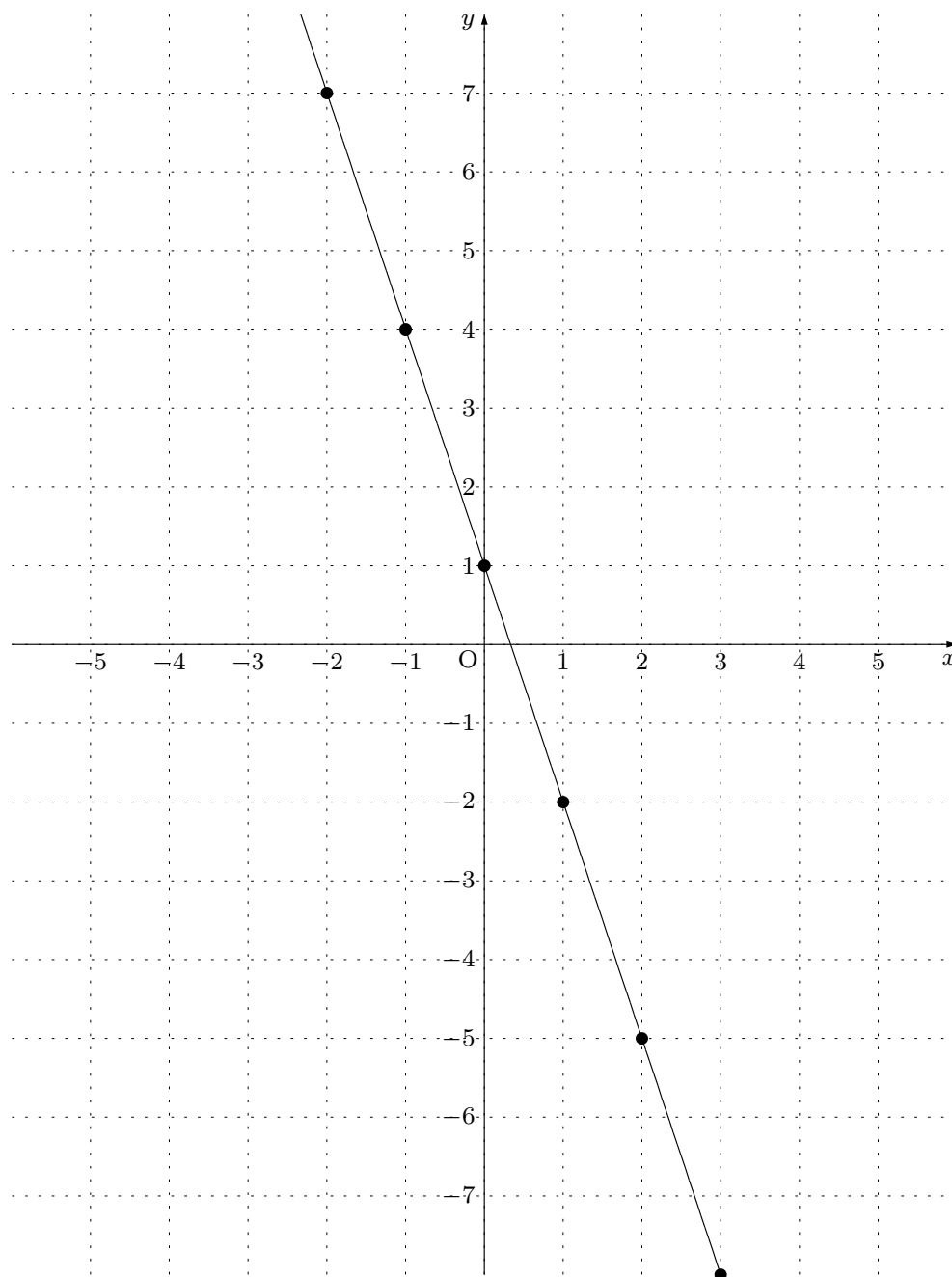
(2) 関数 $y = -x + 1$ のグラフ



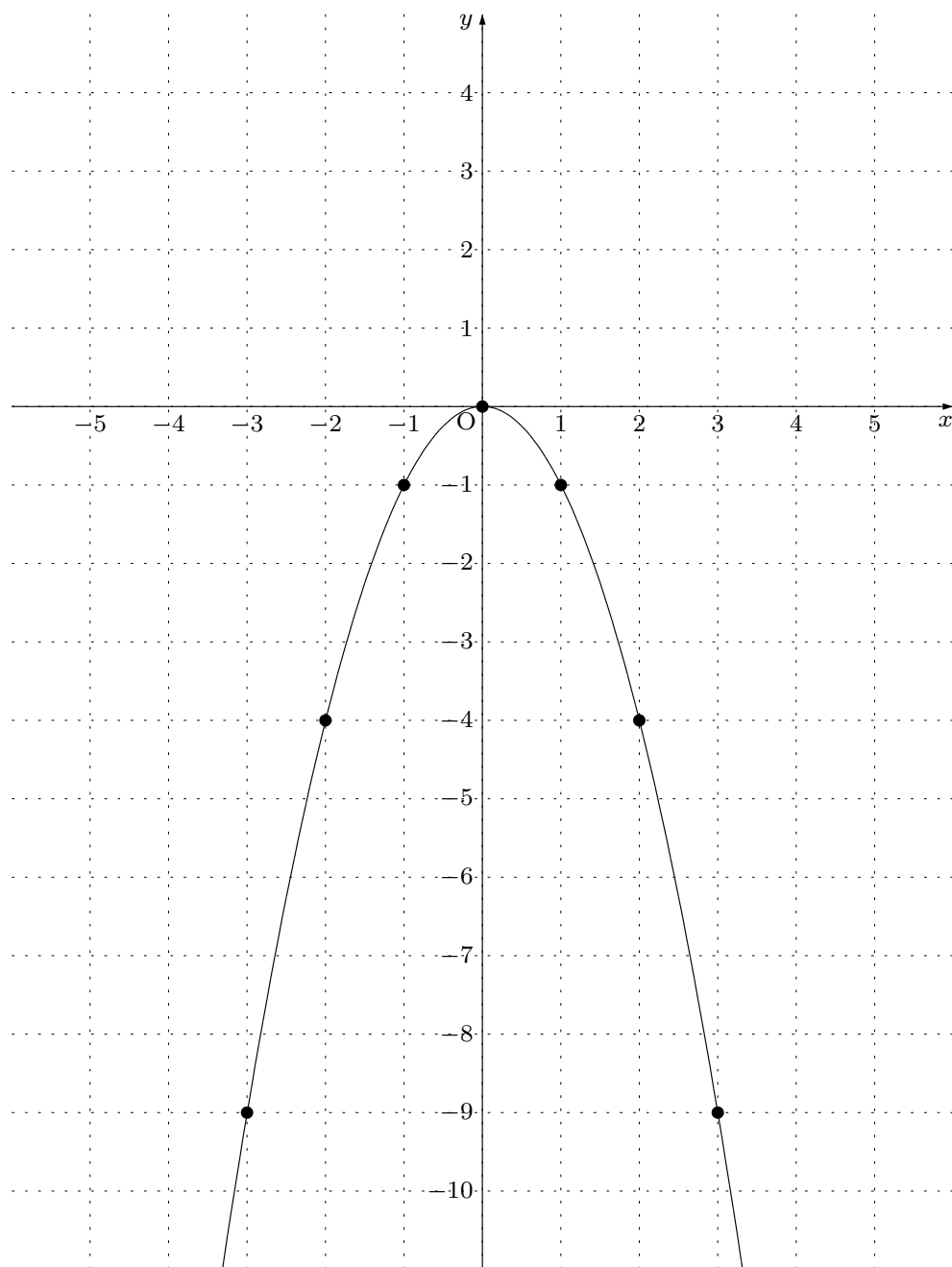
(3) 関数 $y = 2x - 5$ のグラフ



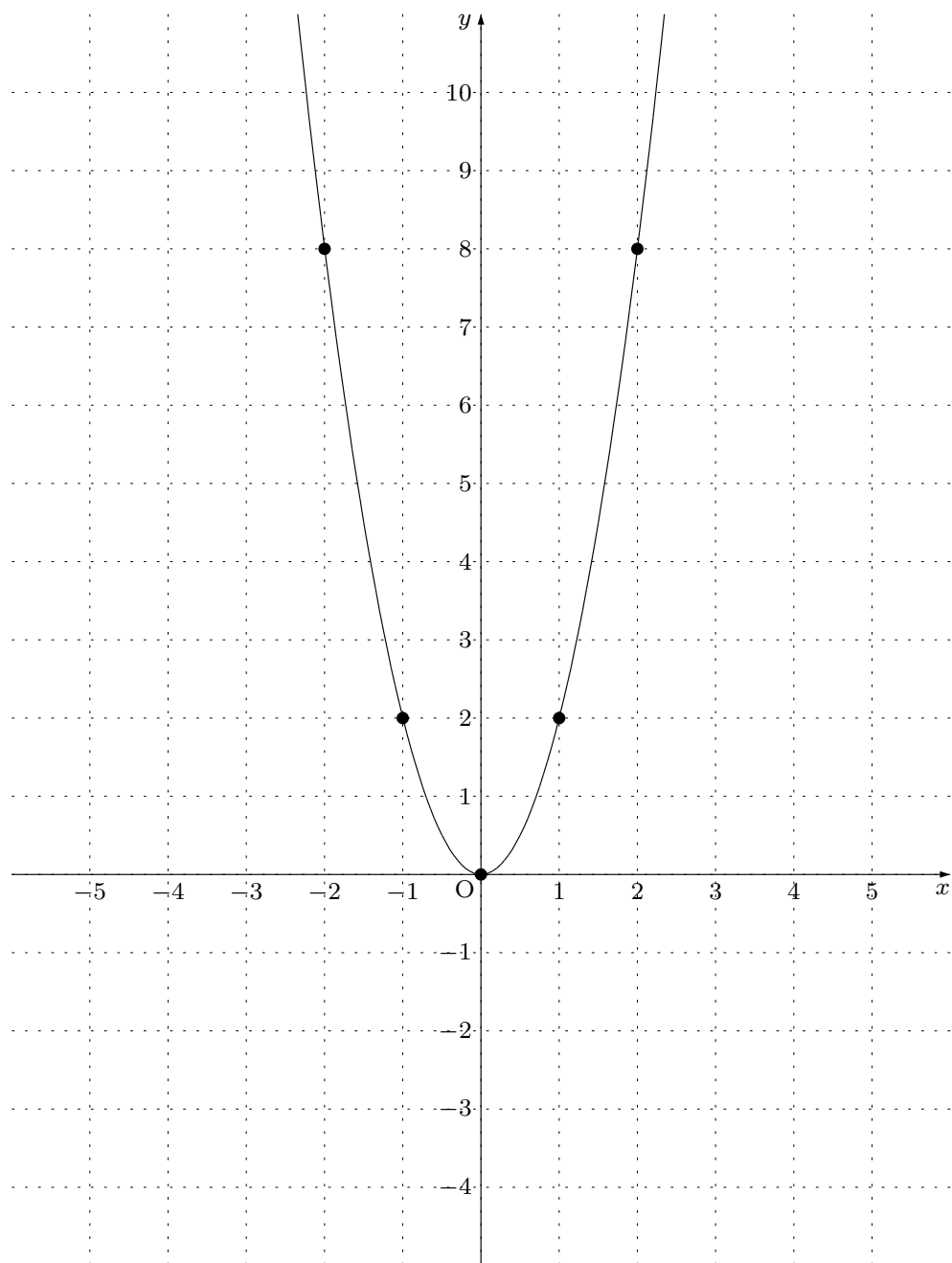
(4) 関数 $y = -3x + 1$ のグラフ



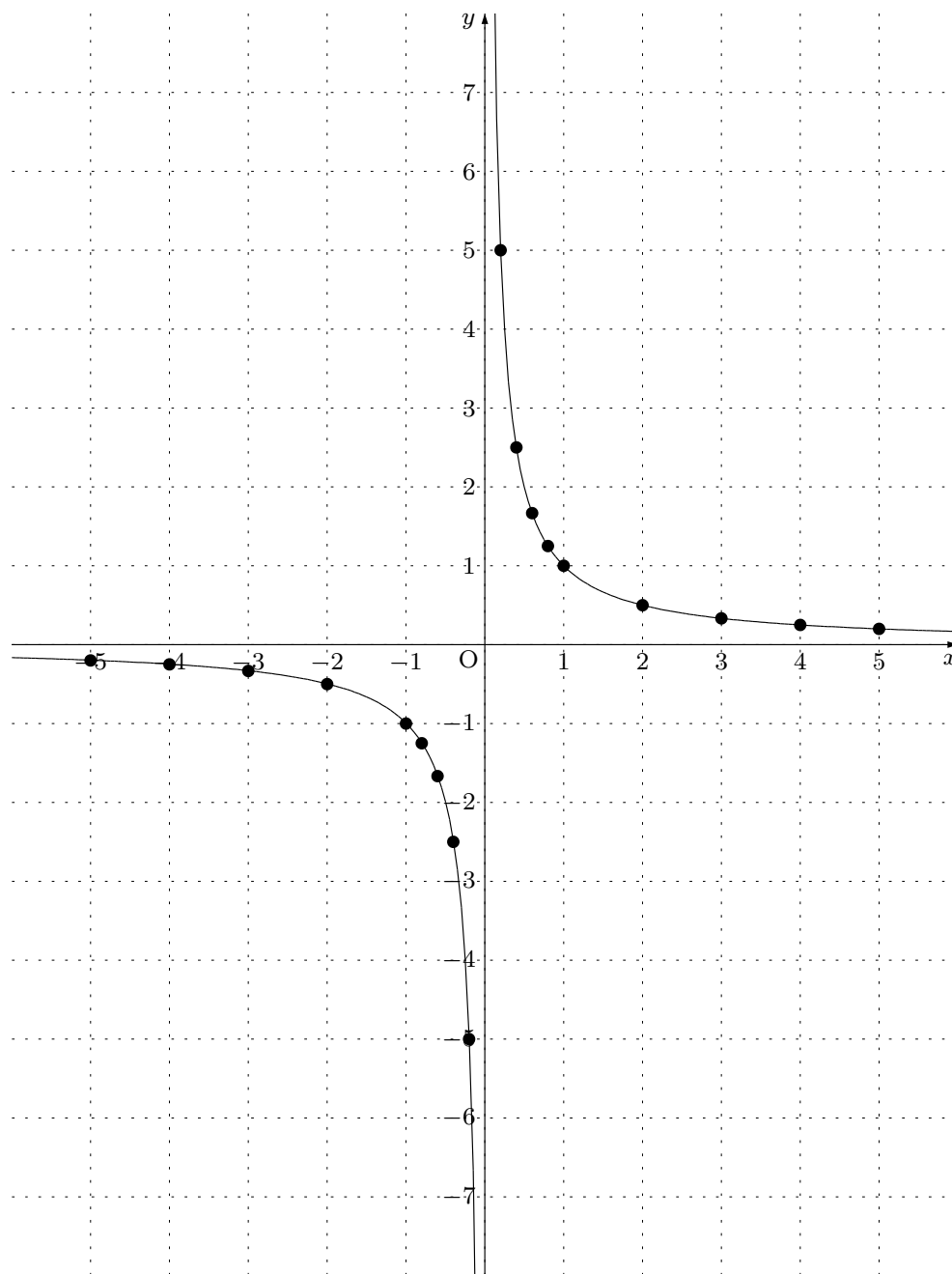
(5) 関数 $y = -x^2$ のグラフ



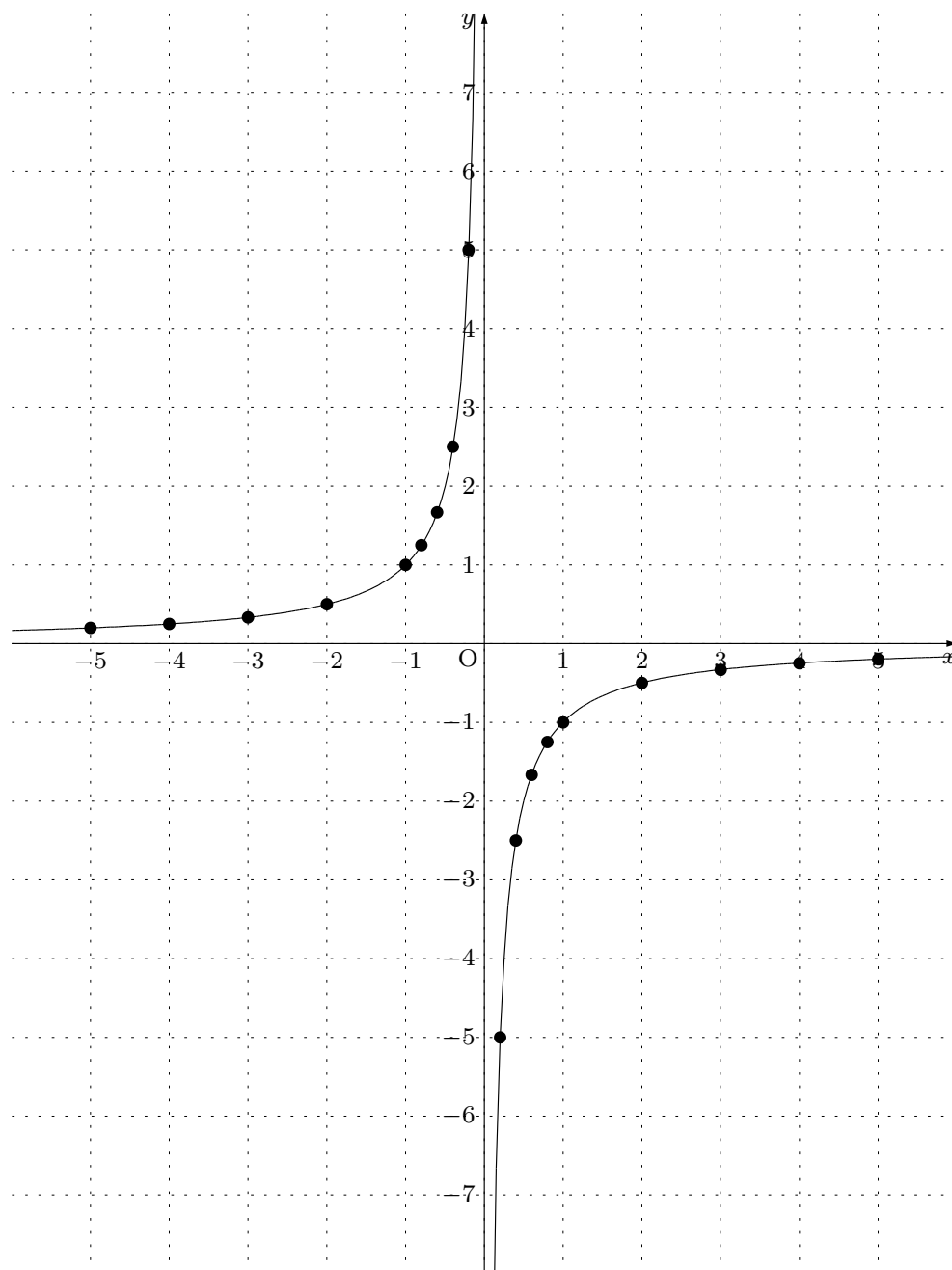
(6) 関数 $y = 2x^2$ のグラフ



(7) 関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ



(8) 関数 $y = -\frac{1}{x}$ のグラフ



[本文へ戻る](#)

問 24. 「入口から入れた数を 2 乗してからさらに 2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の **仲間** です。この関数では、入口から 4 を入れると、出口から **32** が出てきます。また、入口から -7 を入れると、出口から **98** が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から **$2x^2$** が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = 2x^2$$

となります。

[本文へ戻る](#)

問 25. 「入口から入れた数を 2 乗してからさらに -2 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の **仲間** です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から **-2** が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から **-18** が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から **$-2x^2$** が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = -2x^2$$

となります。

[本文へ戻る](#)

問 26. 「入口から入れた数を 2 乗してからさらに $\frac{3}{2}$ 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の **仲間** です。この関数では、入口から 1 を入れると、出口から **$\frac{3}{2}$** が出てきます。また、入口から -3 を入れると、出口から **$\frac{27}{2}$** が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から **$\frac{3}{2}x^2$** が出てきます。ですから、この関数を数式で表すと、

$$y = \frac{3}{2}x^2$$

となります。

[本文へ戻る](#)

問 27. 「入口から入れた数を 2 乗してからさらに -1 倍して出口から出す」という「決まり」の関数は x の 2 乗に比例する関数の **仲間** です。この関数では、入口から 3 を入れると、出口から **-9** が出てきます。また、入口から -5 を入れると、出口から **-25** が出てきます。またさらに、入口から x を入れると出口から **$-x^2$** が出てきます。です

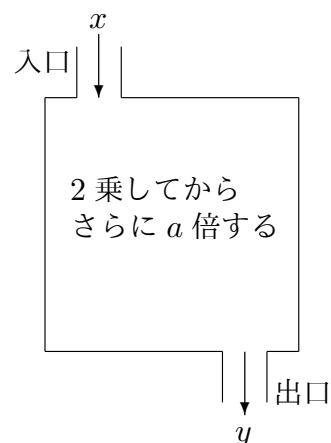
から、この関数を数式で表すと、

$$y = -x^2$$

となります。

[本文へ戻る](#)

問 28. 『右の図を見てください。いくつとは言いませんが、 a は、ある決まった数とします。ただし a は 0 とは違う数とします。この図のように、 x の 2 乗に比例する関数とは、「入口から入れた数を 2 乗してからさらに a 倍して出口から出す」という「決まり」の関数でしたね。



この関数を数式で表してください。』という問題でしたね。

この関数を数式で表すと、もちろん

$$y = ax^2$$

となりますね。

[本文へ戻る](#)

問 29.

- | | | | |
|---------------------|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| ① $y = \frac{2}{x}$ | ② $y = -3x + 1$ | ③ $y = \frac{x}{4}$ | ④ $y = \frac{x}{4} + 2$ |
| ⑤ $y = -2x^2$ | ⑥ $y = \frac{x^2}{3}$ | ⑦ $y = -\frac{3}{x}$ | ⑧ $y = -\frac{1}{3}x^2$ |
| ⑨ $y = -x$ | ⑩ $y = 6x - 5$ | ⑪ $y = \frac{1}{4}x^2$ | ⑫ $y = \frac{6}{x}$ |

①から⑫の関数を「比例」、「反比例」、「一次関数」、「 x の 2 乗に比例する関数」に分ける問題でしたね。

- 「比例」というのは

$$y = \text{ナントカ } x$$

という式であらわされる関数でしたね。（もちろん「ナントカ」が 0 になってはいけません。）

- 「反比例」というのは

$$y = \frac{\text{ナントカ}}{x}$$

という式であらわされる関数でしたね。（もちろん「ナントカ」が0になってはいけません。）

- 「一次関数」というのは

$$y = \text{ナントカ } x + \text{ほにゃらら}$$

という式であらわされる関数でしたね。（もちろん「ナントカ」が0担っているといけません。しかし、「ほにゃらら」は0になっていても良いのですよね。）

- 「 x の2乗に比例する関数」というのは

$$y = \text{ナントカ } x^2$$

という式であらわされる関数でしたね。（もちろん「ナントカ」が0担っているといけません。）

これだけのことを思い出しておいてもらって、あっさり答えだけを書いておくことにします。

「比例」は③、⑨です。

「反比例」は①、⑦、⑫です。

「一次関数」は②、③、④、⑨、⑩です。

「 x の2乗に比例する関数」は⑤、⑥、⑧、⑪です。

[本文へ戻る](#)

問 30. $y = 3x^2$ という式であらわされる関数についての問題でしたね。

- (1) A 君が入口から $x = 3$ を入れると B 君は入口から $x = 6$ を入れます。このとき、出口から出てくる数は

A 君は 27、B 君は 108

になります。

- (2) A 君が入口から $x = -7$ を入れると B 君は入口から $x = -14$ を入れます。このとき、出口から出てくる数は

A 君は 147、B 君は 588

になります。

- (3) A 君が入口から $x = 5$ を入れると B 君は入口から $x = 10$ を入れます。このとき、出口から出てくる数は

A 君は 75、B 君は 300

になります。

- (4) A 君が入口から $x = -4$ を入れると B 君は入口から $x = -8$ を入れます。このとき、出口から出てくる数は

A 君は 48、B 君は 192

になります。

- (5) A 君が入口から $x = -\frac{3}{2}$ を入れると B 君は入口から $x = -3$ を入れます。このとき、出口から出てくる数は

A 君は $\frac{27}{4}$ 、B 君は 27

になります。

- (6) (1) から (5) の調査結果をまとめると次のようになります。

--- 関数 $y = 3x^2$ でいつも B 君が A 君の 2 倍の数を入口から入れると ... -----
(1)

入口から入れる x の値

A 君	B 君
$x = 3$	$x = 6$

→

出口から出てくる y の値

A 君	B 君
$y = 27$	$y = 108$

(2)

入口から入れる x の値

A 君	B 君
$x = -7$	$x = -14$

→

出口から出てくる y の値

A 君	B 君
$y = 147$	$y = 588$

(3)

入口から入れる x の値

A 君	B 君
$x = 5$	$x = 10$

→

出口から出てくる y の値

A 君	B 君
$y = 75$	$y = 300$

(4)

入口から入れる x の値

A 君	B 君
$x = -4$	$x = -8$

→

出口から出てくる y の値

A 君	B 君
$y = 48$	$y = 192$

(5)

入口から入れる x の値

A 君	B 君
$x = -\frac{3}{2}$	$x = 3$

→

出口から出てくる y の値

A 君	B 君
$y = \frac{27}{4}$	$y = 27$

(7) ここまでの調査結果をよく見て考えてみましょう。すると 108 は 27 の 4 倍、588

は 147 の 4 倍、300 は 75 の 4 倍、192 は 48 の 4 倍、27 は $\frac{27}{4}$ の 4 倍であることに気づくでしょう。ですから、

出口から出てくる y の値は、いつも必ず、B 君は A 君の値の 4 倍になっているということなのです。

[本文へ戻る](#)

問 31. 関数 $y = 3x^2$ で、「いつも B 君は A 君の 3 倍の数を入力から入れる」話でしたね。

- (1) 『あなたが A 君と B 君になったつもりで、入口から入れる数を 5 パターン考えてください。そして次の表を完成してください。』という問題でしたね。例えば、以下のようになります。

--- 関数 $y = 3x^2$ でいつも B 君が A 君の 3 倍の数を入力から入れると ... -----

①									
入口から入れる x の値	出口から出てくる y の値								
<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$x = -2$</td><td>$x = -6$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$x = -2$	$x = -6$	<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$y = 12$</td><td>$y = 108$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$y = 12$	$y = 108$
A 君	B 君								
$x = -2$	$x = -6$								
A 君	B 君								
$y = 12$	$y = 108$								
②									
入口から入れる x の値	出口から出てくる y の値								
<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$x = -1$</td><td>$x = -3$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$x = -1$	$x = -3$	<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$y = 3$</td><td>$y = 27$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$y = 3$	$y = 27$
A 君	B 君								
$x = -1$	$x = -3$								
A 君	B 君								
$y = 3$	$y = 27$								
③									
入口から入れる x の値	出口から出てくる y の値								
<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$x = 4$</td><td>$x = 12$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$x = 4$	$x = 12$	<table> <tr> <th>A 君</th><th>B 君</th></tr> <tr> <td>$y = 48$</td><td>$y = 432$</td></tr> </table>	A 君	B 君	$y = 48$	$y = 432$
A 君	B 君								
$x = 4$	$x = 12$								
A 君	B 君								
$y = 48$	$y = 432$								

④

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = 7$	$x = 21$	\Rightarrow	$y = 147$	$y = 1323$

⑤

入口から入れる x の値			出口から出てくる y の値	
A 君	B 君		A 君	B 君
$x = \frac{5}{3}$	$x = 5$	\Rightarrow	$y = \frac{25}{3}$	$y = 75$

(2) 『あなたが (1) で完成した表もよく見て答えてください。

関数 $y = 3x^2$ では、いつも B 君が A 君の 3 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？』という問題でした。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の 9 倍になっている」ということがわかると思います。

[本文へ戻る](#)

問 32. 関数 $y = 3x^2$ についての問題でした。

- (1) 『いつも B 君が A 君の 4 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問 31 のような表を作って調べてください。』という問題でしたね。

表を作るのはあなたにおまかせします。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の 16 倍になっている」ということがわかると思います。

- (2) 『いつも B 君が A 君の 5 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問 1 のような表を作って調べてください。』という問題でしたね。

表を作るのはあなたにおまかせします。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の 25 倍になっている」ということがわかると思います。

- (3) 『いつも B 君が A 君の n 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？』という問題でしたね。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の n^2 倍になっている」ということが想像できるでしょう。

[本文へ戻る](#)

問 33. 関数 $y = -2x^2$ についての問題でしたね。

- (1) 『いつも B 君が A 君の 2 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分でさっきの問 1 のような表を作って調べてください。』という問題でしたね。

表を作るのはあなたにおまかせします。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の 4 倍になっている」ということがわかると思います。

- (2) 『いつも B 君が A 君の -3 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？自分で問 1 のような表を作って調べてください。』という問題でしたね。

表を作るのはあなたにおまかせします。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の 9 倍になっている」ということがわかると思います。

- (3) 『いつも B 君が A 君の n 倍の数を入口から入れると、出口から出てくる y の値は A 君と B 君ではいつもどのように違っていると思いますか？』という問題でしたね。

「出口から出てくる y の値を A 君と B 君でくらべてみると、いつも必ず、B 君は A 君の値の n^2 倍になっている」ということが想像できるでしょう。

[本文へ戻る](#)

問 34. 空欄を埋めて「 x の 2 乗に比例する関数の性質」のまとめを作る問題でした。以下のようになります。

— x の 2 乗に比例する関数の性質 —

関数 $y = ax^2$ では、入口から入れる数 x を 2 倍、3 倍、4 倍、5 倍 … としていくと、出口から出てくる数 y は 4 倍、9 倍、16 倍、25 倍 … となっていくます。

また、入口から入れる数 x を -2 倍、 -3 倍、 -4 倍、 -5 倍 … としていくと、出口から出てくる数 y は 4 倍、9 倍、16 倍、25 倍 … となっていくます。

つまり、関数 $y = ax^2$ では、入口から入れる数 x を n 倍にすると、出口から出てくる数 y は n^2 倍になります。

[本文へ戻る](#)

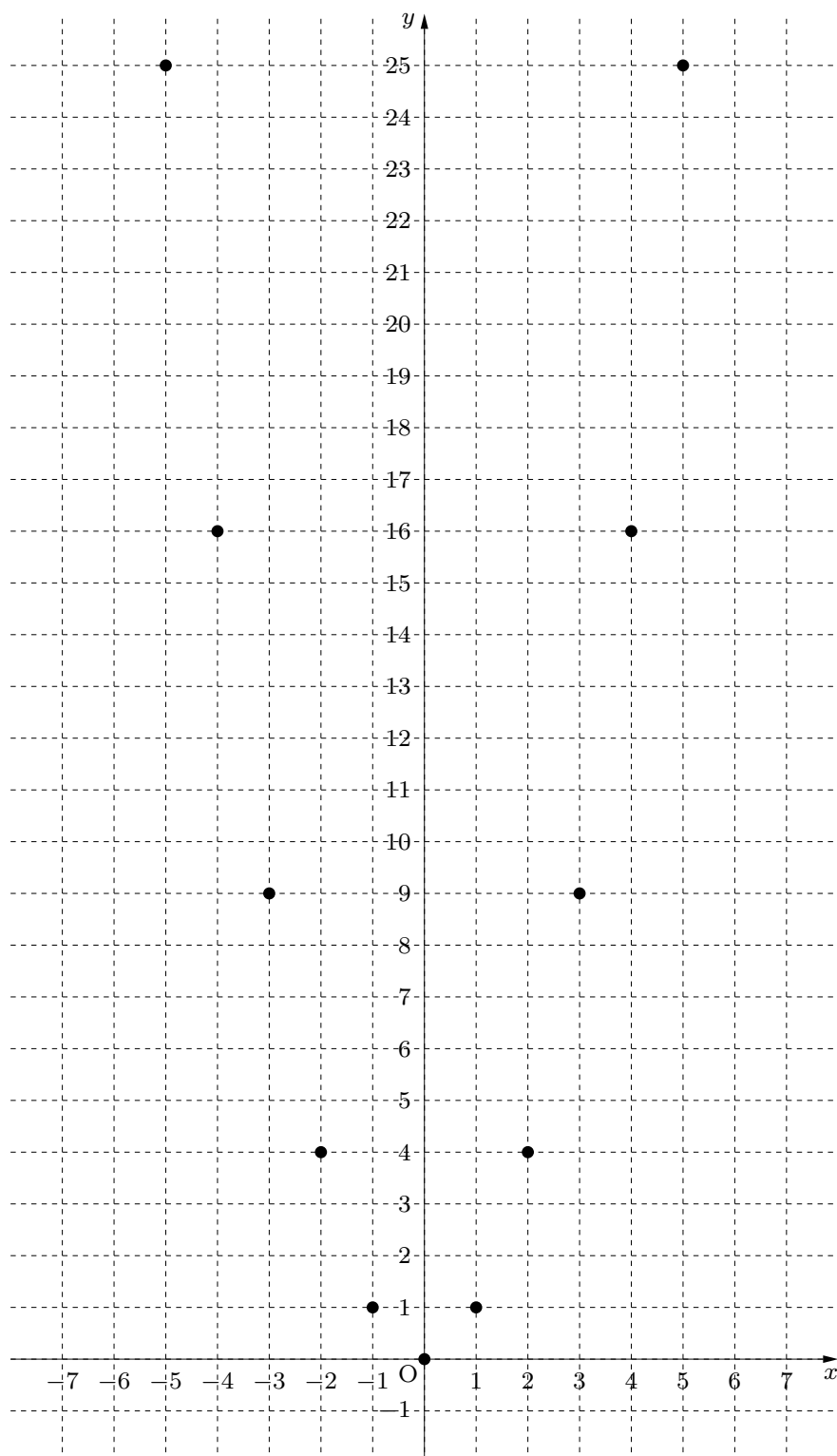
問 35. 『49 ページから始まる「1.4.2 関数のグラフの作り方」で学んだやり方で関数 $y = x^2$ のグラフを作ろうと思います。次の手順に従ってグラフを作ってください。』という問題でしたね。

手順 1 関数 $y = x^2$ の表は次のようになります。

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	...

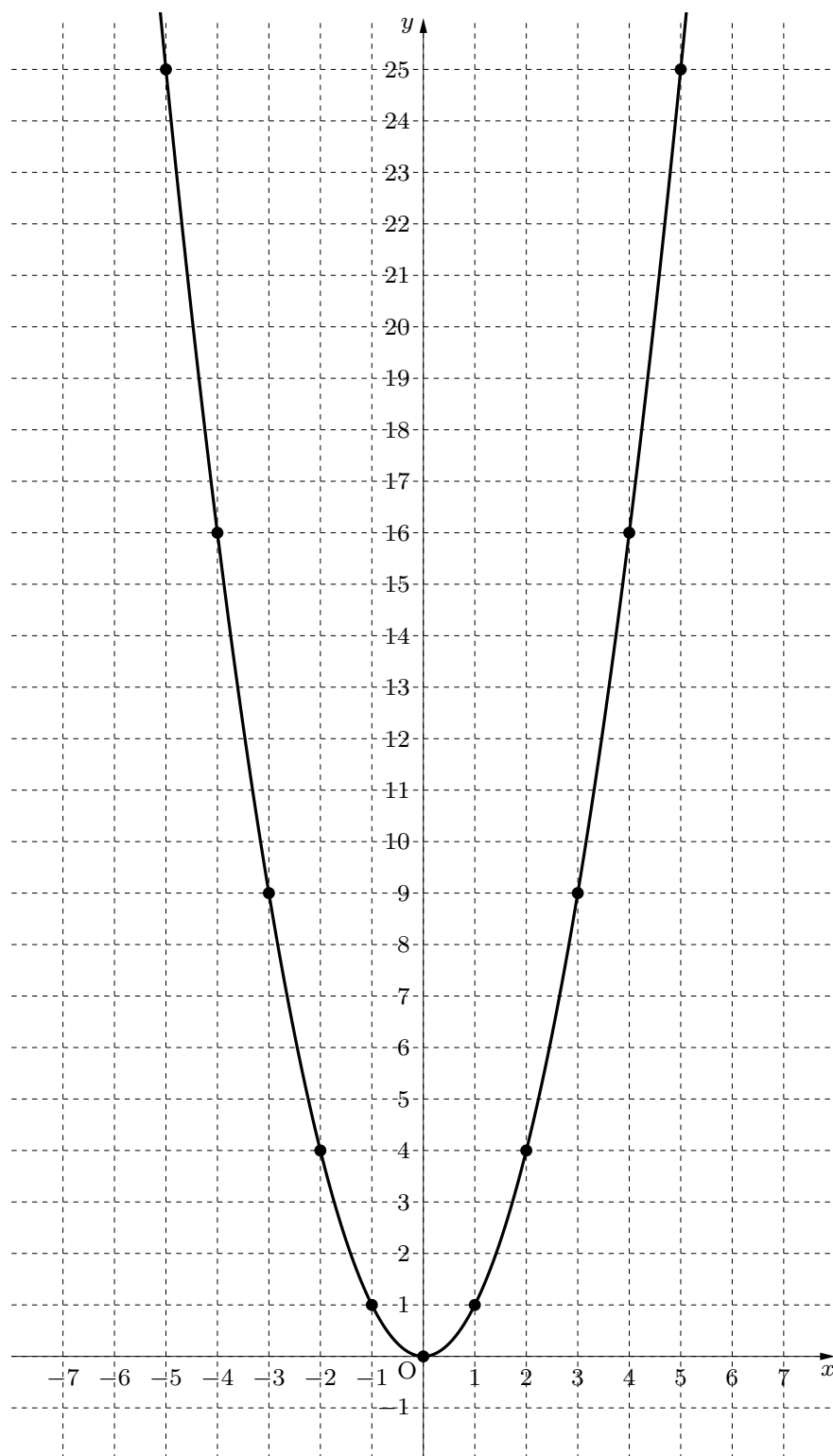
手順 2 『ノートまたは方眼紙を用意ください。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りください。』ということでした。あなたにお任せします。

手順 3 『手順 1 で作った表をよく見て調べた点を全て座標平面の上に打ちください。』ということでした。次のようになります。



手順4 『点と点の間を「本当らしく」結んで、関数 $y = x^2$ のグラフを完成しなさい。』

ということでした。次のようになります。



問 36. 関数 $y = x^2$ のグラフの原点の周りの様子を詳しく調べるために、以下の手順に従って原点の周りのグラフを作る問題でしたね。

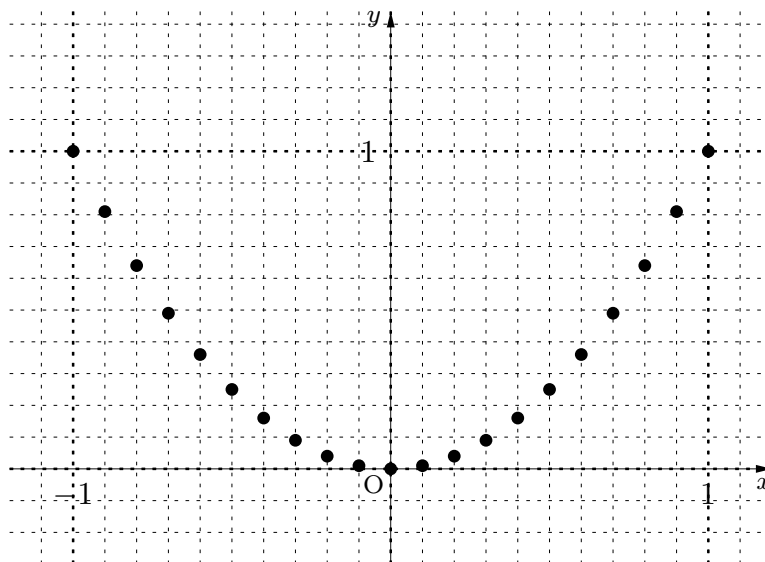
手順 1 関数 $y = x^2$ の表は次のようになります。

x	...	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
y	...	1	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01	0

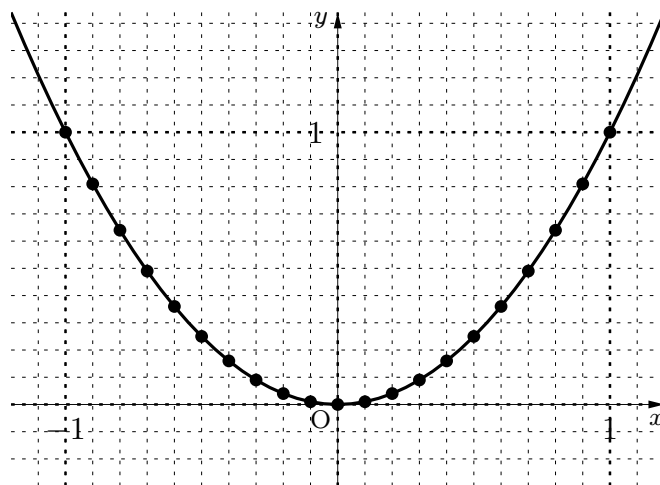
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	...
0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1	...

手順 2 『ノートまたは方眼紙を用意なさい。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りなさい。(x の値を 0.1 きざみにしたのでですから 1 目盛りを大きくしておいてください。)』ということでした。あなたにお任せします。

手順 3 手順 1 で作った表をよく見て調べた点を全て座標平面の上に打つと、次のようになります。



手順 4 点と点の間を「本当らしく」結んで、関数 $y = x^2$ のグラフを完成すると、次のようになります。


[本文へ戻る](#)

問 37. 「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を比べる問題でしたね。

- (1) グラフを描く準備として、「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ 」の表と「基本となる関数 $y = x^2$ 」の表をそれぞれ作ると次のようになります。

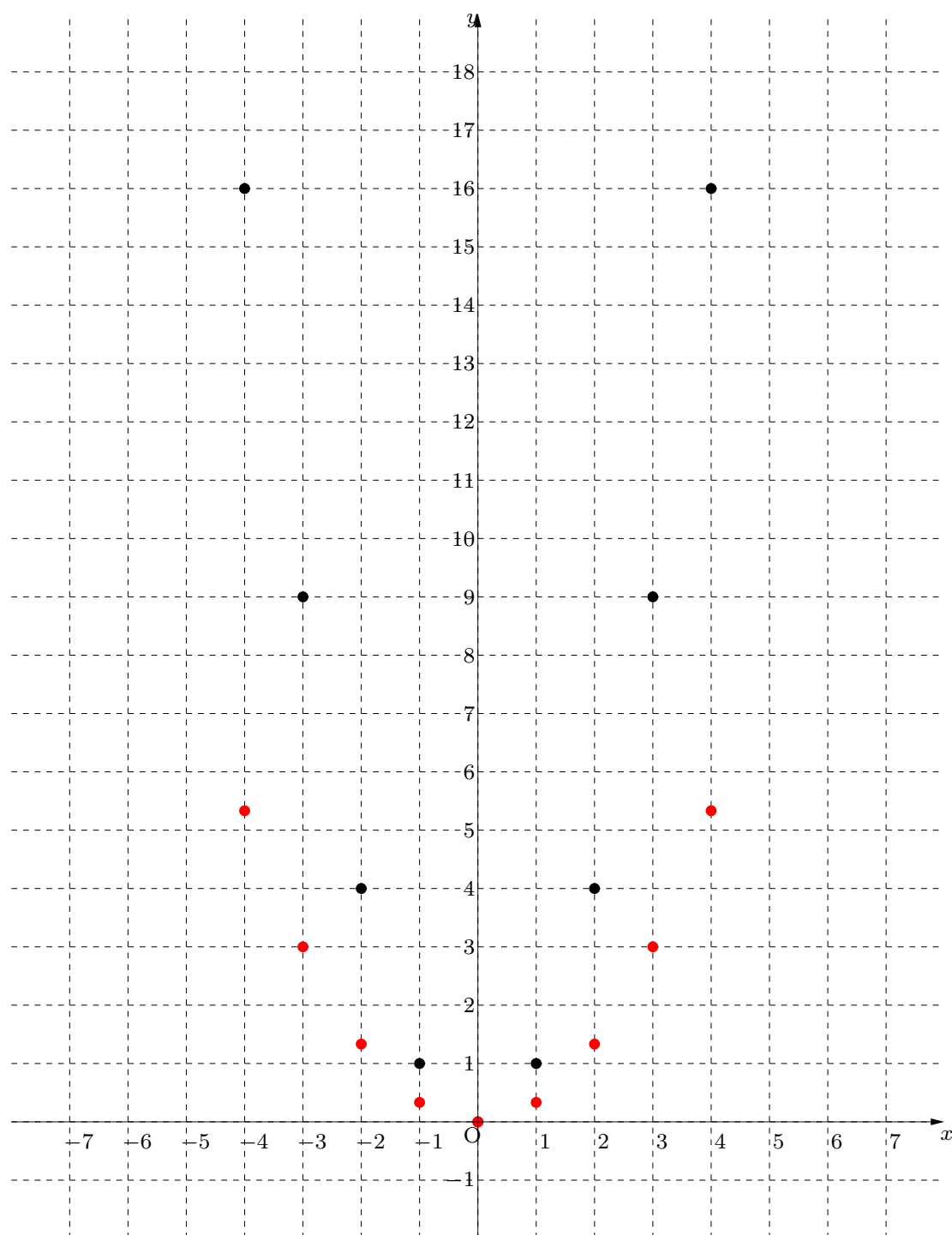
関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	$\frac{16}{3}$	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{16}{3}$...

基本となる関数 $y = x^2$ の表

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

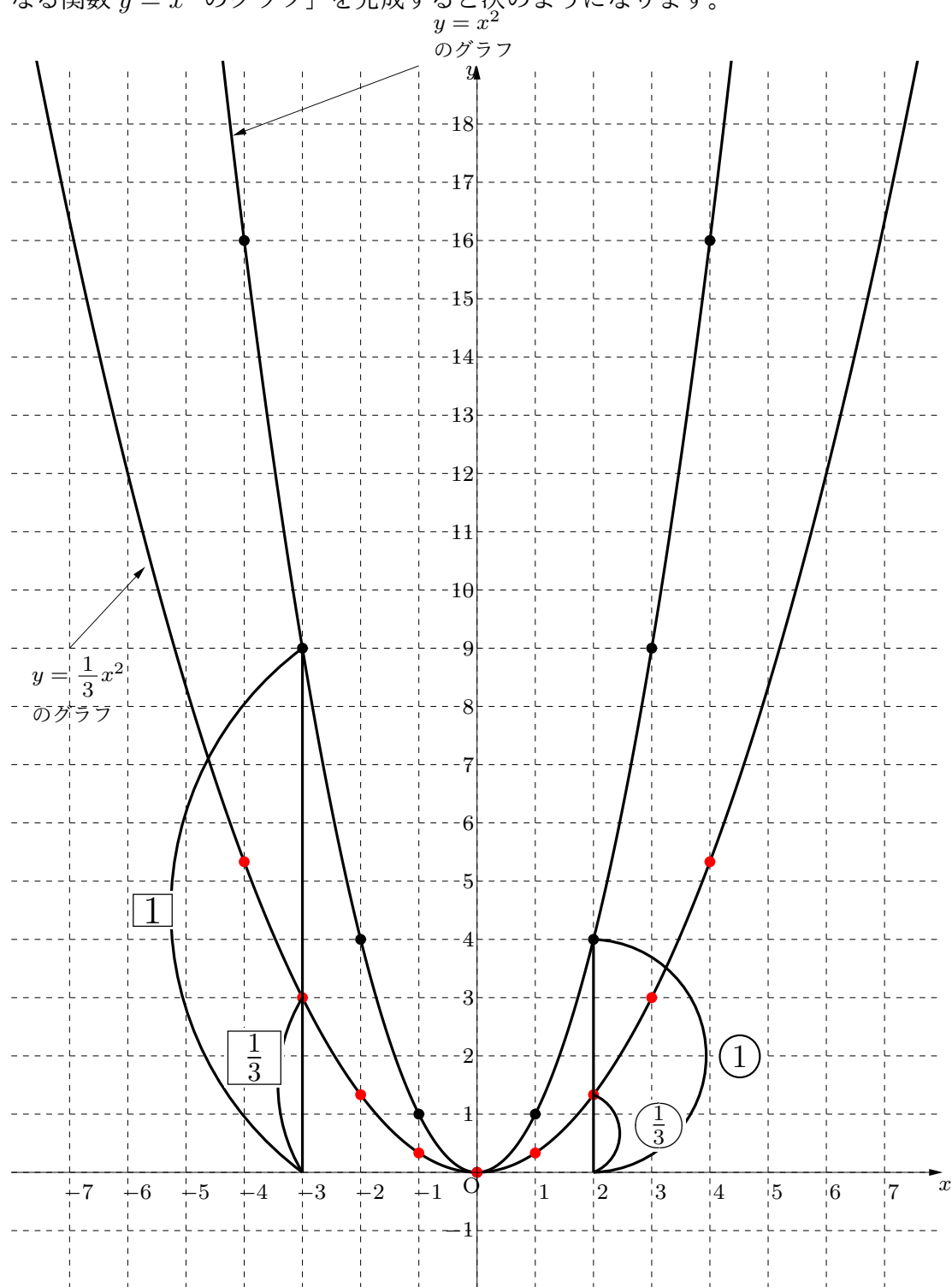
- (2) 『ノートまたは方眼紙を用意しなさい。そして x 軸と y 軸を描き、目盛りも打って座標平面を作りなさい。』ということでした。あなたにお任せします。
- (3) (1) で作った表をよく見て、調べた点を全て 1 つの座標平面の上に打つと、次のようになります。



黒い点は関数 $y = x^2$ の表を見て打った点

赤い点は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ の表を見て打った点

- (4) 点と点の間を「本当らしく」結んで、関数「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」を完成すると次のようになります。



- (5) 『「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ」と、「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ」の間にはどのような関係があるといえますか。88 ページの「よく理解して欲しいこと」に書いてあることを参考にして答えなさい。』ということでしたね。

答えを言うと、

「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点」と「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」 x 軸からの高さを同じ x の値のところで比べてみます。すると必ず、「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さは「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さの $\frac{1}{3}$ 倍になっています。これは、「関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ の決まり」は「基本となる関数 $y = x^2$ の決まり」に続いて「さらに $\frac{1}{3}$ 倍する」というようになっているからです。

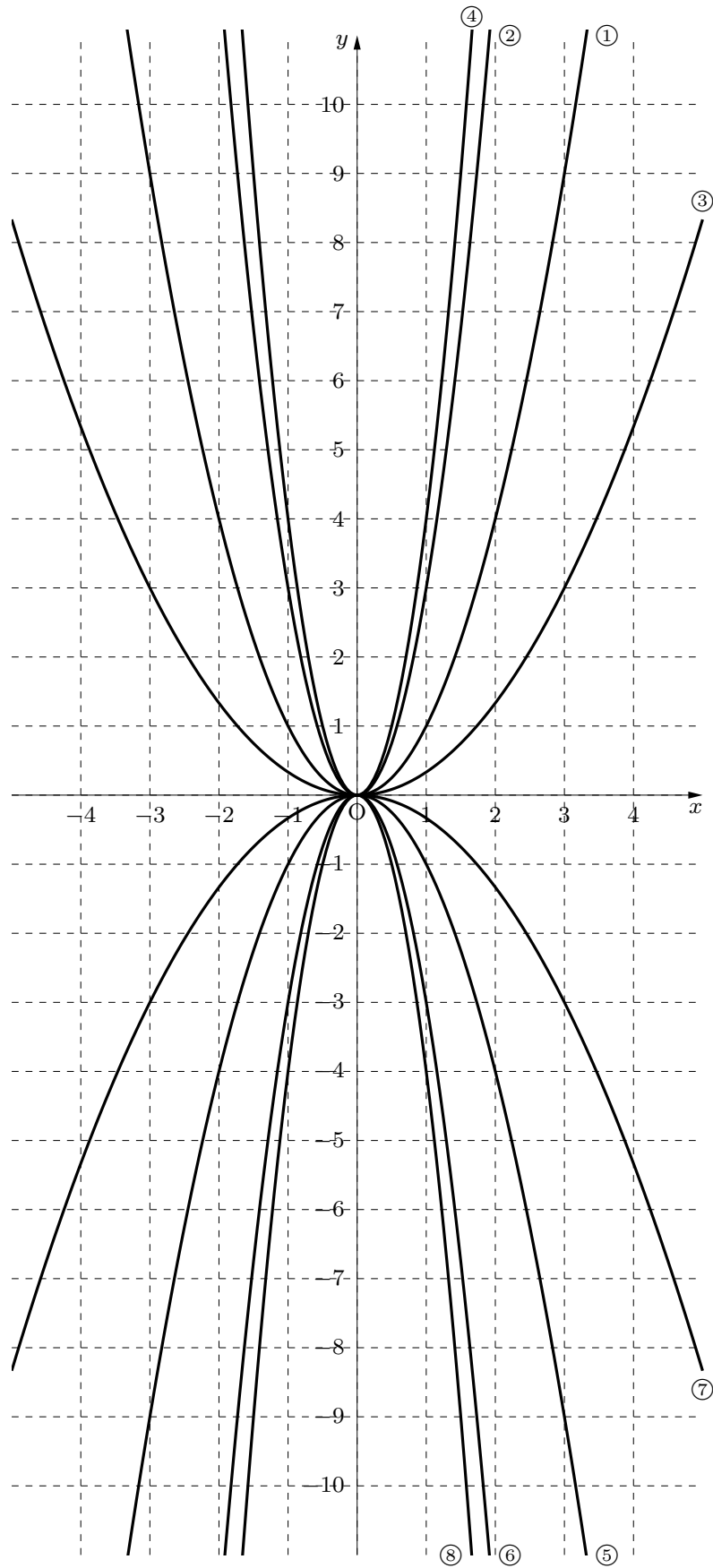
ということになりますね。

[本文へ戻る](#)

問 38. 以下の x の 2 乗に比例する関数のグラフを全て 1 つの座標平面の上に描くのでしたね。そしてさらに、これらの関数のグラフが基本となる関数 $y = x^2$ のグラフとどのような関係があるか答えるのでした。

- | | | | |
|--------------|---------------|-------------------------|---------------|
| ① $y = x^2$ | ② $y = 3x^2$ | ③ $y = \frac{1}{3}x^2$ | ④ $y = 4x^2$ |
| ⑤ $y = -x^2$ | ⑥ $y = -3x^2$ | ⑦ $y = -\frac{1}{3}x^2$ | ⑧ $y = -4x^2$ |

- (1) ①から⑧の関数のグラフを、全て 1 つの座標平面の上に描くと次のようになります。



- (2) 『それぞれ②から⑧の関数のグラフを①の関数のグラフと比べ、それぞれどのような関係があるといえるか答えなさい。88 ページの「よく理解して欲しいこと」に書いてあることを参考にして答えること。』ということでしたね。

答えを言うと、

「関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点」と「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」 x 軸からの高さを同じ x の値のところで比べてみます。すると必ず、「関数 $y = ax^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さは「基本となる関数 $y = x^2$ のグラフ上の点」の x 軸からの高さの a 倍になっています。これは、「関数 $y = ax^2$ の決まり」は「基本となる関数 $y = x^2$ の決まり」に続いて「さらに a 倍する」というようになっているからです。

ということになりますね。

[本文へ戻る](#)

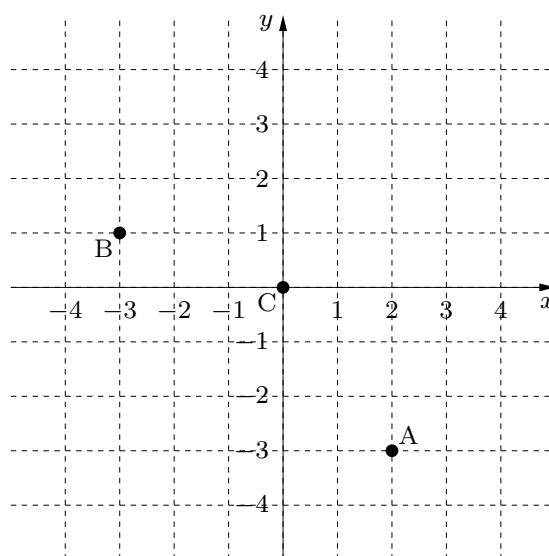
問 39. この問題の答えは本文の中に詳しく説明してあります。本文で、この問題の次の説明をよく読んでください。

[本文へ戻る](#)

問 40. 「原点」と関数 $y = ax^2$ についての問題でしたね。

- (1) 数学で「原点」と呼ばれているのは右の図の点 C ですね。

- (2) 『 a の値を 2 にしたり 3 にしたり -1 にしたり $-\frac{1}{2}$ にしたり… と、いろいろと a の値を変えれば関数 $y = ax^2$ のグラフもいろいろと変わりますが、グラフが原点を通らないものはありますか?』という問題でしたね。



答えを言うと、 a がいくつであっても、関数 $y = ax^2$ のグラフは必ず原点を通ります。

[本文へ戻る](#)

問 41. a の値がいろいろな場合の、関数 $y = ax^2$ のグラフについて考える問題でしたね。

- (1) 関数 $y = 8x^2$ のグラフを作ると、上に開いた \cup のタイプになります。
- (2) 関数 $y = -5x^2$ のグラフを作ると、下に開いた \cap のタイプになります。
- (3) 関数 $y = ax^2$ のグラフが上に開いた \cup のタイプになるのか、下に開いた \cap のタイプになるのか判断するには、式の中の a に注目します。
- a がプラスの数なら、グラフは上に開いた \cup のタイプになります。
- a がマイナスの数なら、グラフは下に開いた \cap のタイプになります。

[本文へ戻る](#)

問 42. a の値がいろいろな場合の、関数 $y = ax^2$ のグラフについて考える問題でしたね。

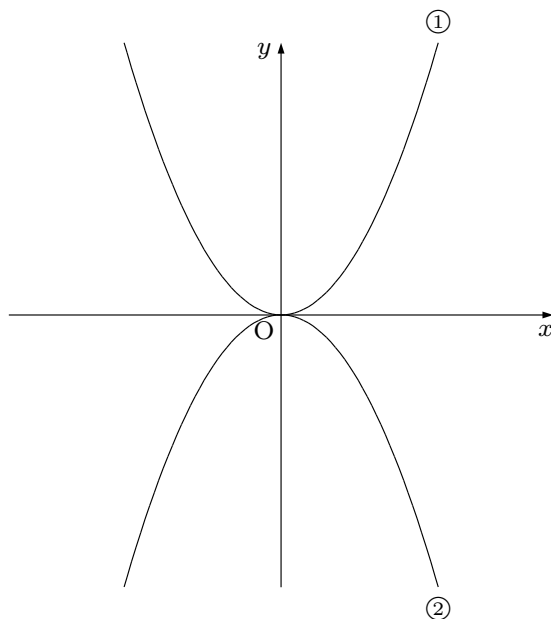
- (1) 関数 $y = 8x^2$ のグラフと 関数 $y = 5x^2$ のグラフでは、開き具合の大きいのは関数 $y = 5x^2$ のグラフです。
- (2) 関数 $y = -2x^2$ のグラフと 関数 $y = -7x^2$ のグラフでは、開き具合の大きいのは関数 $y = -2x^2$ のグラフです。
- (3) 関数 $y = ax^2$ のグラフの開き具合を判断するには、式の中の a に注目します。ただし、 a がマイナスの数の場合はマイナスのマークを無視します。(つまり、例えば、 a が -3 だったらマイナスのマークを無視して 3 という数に注目します。)
- 注目した数が小さいほど、グラフの開き具合は大きくなります。

[本文へ戻る](#)

問 43. 右の図のような2つの放物線①、②があり、放物線①と放物線②は x 軸に関して対称になっている話でしたね。

(1) 放物線①が関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフだとしたら、放物線②は $y = -\frac{1}{2}x^2$ という式であらわされる関数のグラフです。

(2) 放物線②が関数 $y = -3x^2$ のグラフだとしたら、放物線①は $y = 3x^2$ という式であらわされる関数のグラフです。



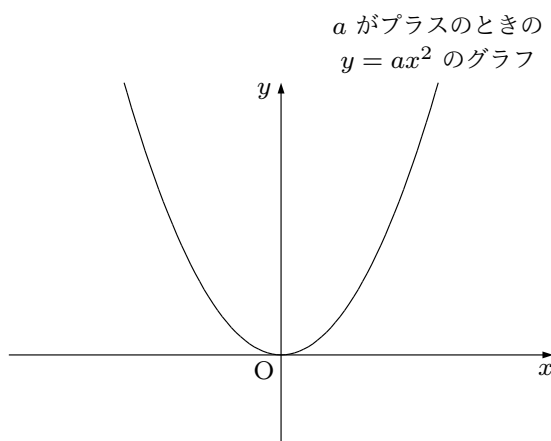
[本文へ戻る](#)

問 44. これまでに学んできたように、関数 $y = ax^2$ のグラフは a がプラスの数のときは上に開いた形になり、 a がマイナスの数のときは下に開いた形になりますね。そして関数 $y = ax^2$ のグラフは必ず「原点」とよばれている場所を通るのでした。このことをしっかり頭に入れておいて、文中の空欄に正しい数、式、言葉を記入する問題でしたね。

(1) a がプラスのとき、関数 $y = ax^2$ のグラフは右の図のようになりますね。

このグラフは x が 以下の所では右 になっています。ということは、この関数は x が 以下の所では x は増えるにつれて y は ということになります。

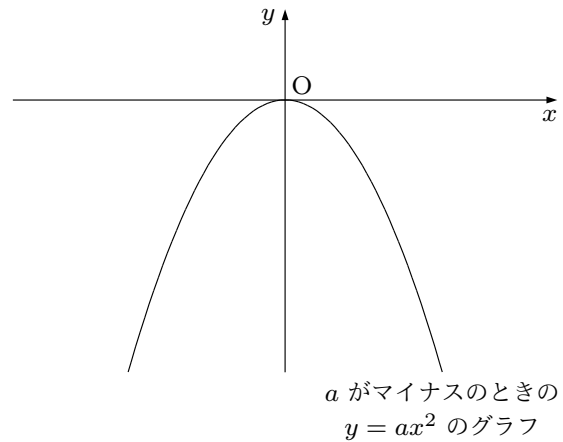
このグラフは x が 以上の所では右 になっています。ということは、この関数は x が 以上の所では x は増えるにつれて y は ということになります。



(2) a がマイナスのとき、関数 $y = ax^2$ の

グラフは右の図のようになりますね。

このグラフは x が $\boxed{0}$ 以下の所では右 $\boxed{\text{上がり}}$ になっています。ということは、この関数は x が $\boxed{0}$ 以下の所では x は増えるにつれて y は $\boxed{\text{増える}}$ ということになります。



このグラフは x が $\boxed{0}$ 以上の所では

右 $\boxed{\text{下がり}}$ になっています。ということは、この関数は x が $\boxed{0}$ 以上の所では x は増えるにつれて y は $\boxed{\text{減る}}$ ということになります。

[本文へ戻る](#)

問 45. ある関数があり、 y は x の 2 乗に比例し、 $x = -3$ のとき $y = -18$ となっているのでした。

(1) 『 y を x の式で表しなさい。』という問題でしたね。

「 y は x の 2 乗に比例する関数」というのは「その関数の決まりを式であらわすと $y = ax^2$ という形の式になる関数」でしたね。ですから当然、これから求めようとしている関数の式は、

$$y = ax^2$$

という形をしているはずですが、しかし、 a の値は今の所不明なわけです。

問題をよく読めば、 a がいくつなのかを発見するための手がかりが書いてあるのがわかりますよね。 $x = -3$ のとき $y = -18$ となっているって書いてありますから。つまり、この関数では、 x の値を -3 にすると y の値は -18 になるということですから、 $y = ax^2$ という式の x を -3 にすると y は -18 になっているということになりますよね。というわけで、

$$-18 = a \times (-3)^2$$

が成り立っているわけです。この式から謎の数 a の値を求めることができますよね。どうするのかというと、まず、 $(-3)^2$ の所を計算して、

$$-18 = a \times 9$$

としますよね。次は、この式の左辺と右辺を 9 でわって、

$$-2 = a$$

とできますよね。これで謎の数 a の値がわかりました。というわけで、この問題の答えは

$$y = -2x^2$$

ということになりますね。

(2) 『この関数では $x = -2$ のとき y の値はいくつになりますか。』という問題でしたね。

(1) でこの関数の式は

$$y = -2x^2$$

であることがわかったのですから、この式で x を -2 にして計算すればよいわけです。すると、

$$y = -2 \times (-2)^2 = 2 \times 4 = -8$$

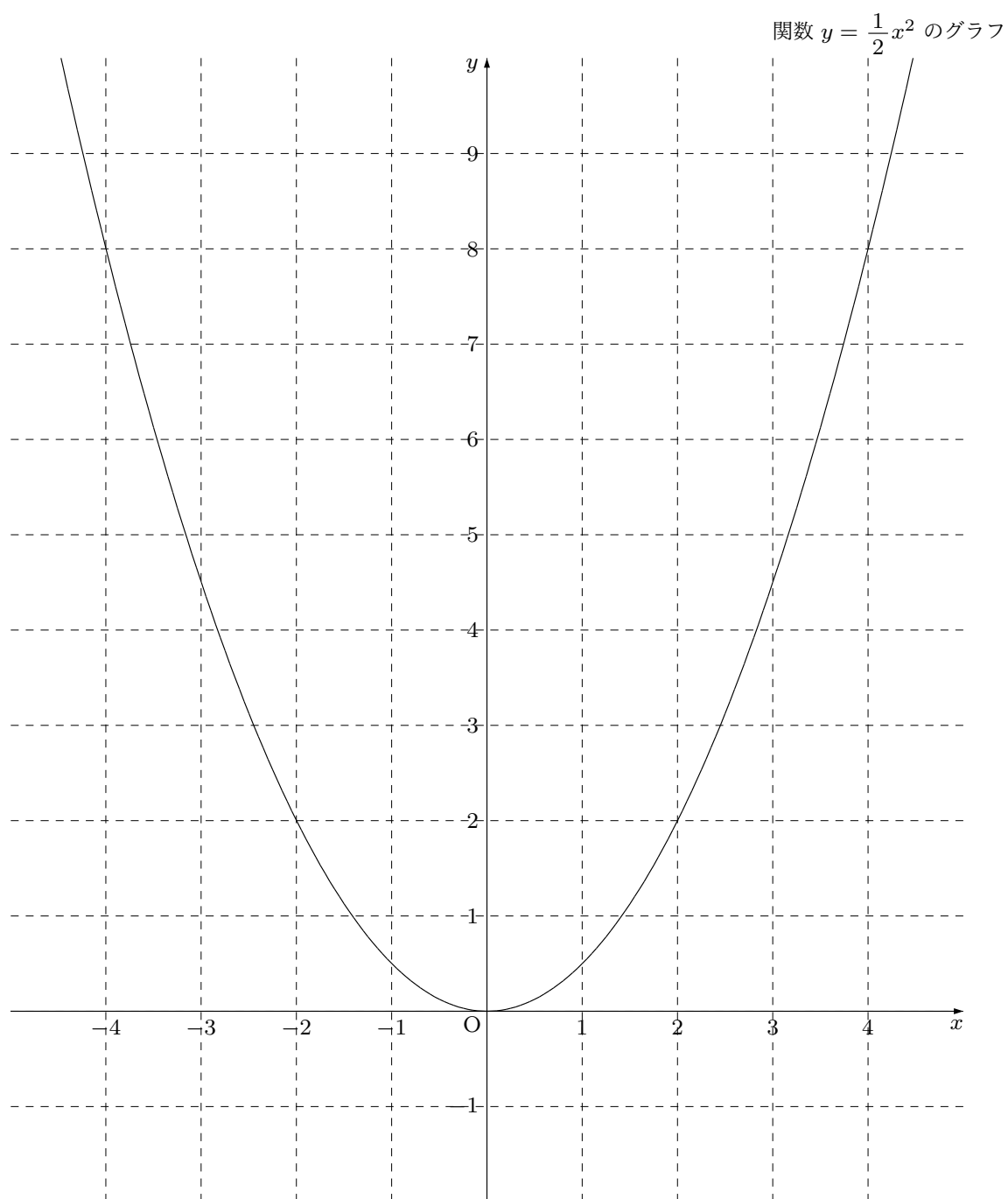
であることがわかります。

[本文へ戻る](#)

問 46. この問題の答えは本文に書いてあります。

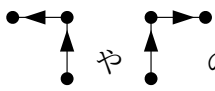
[本文へ戻る](#)

問 47. 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを大きめに描くと次のようになります。

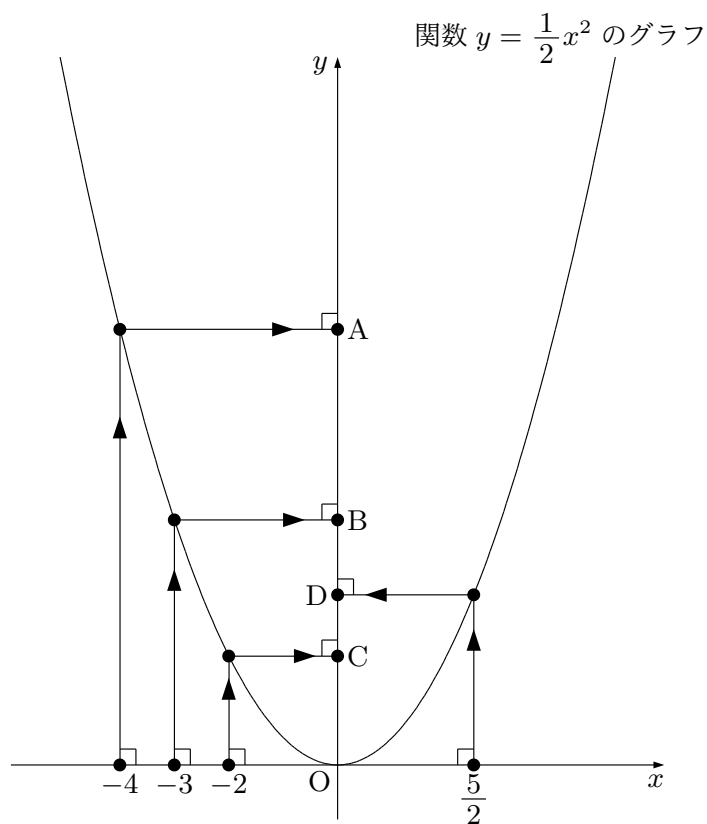
[本文へ戻る](#)

問 48. この問の答えは本文で詳しく説明してあります。

[本文へ戻る](#)

問 49. 右の図のような関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフについての問題でした。この図に付いているいくつかの

 のような「矢のついた折れ線」に注目して考えるのでしたね。

関数とはなにかということや関数のグラフの作りかたを理解している人はどうすればよいかすぐにわかると思います。



- (1) 『 y 軸上の A の所を書いてある数はいくつのはずですか。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -4 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

であることがわかります。

- (2) 『 y 軸上の B の所を書いてある数はいくつのはずですか。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -3 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}$$

であることがわかります。

- (3) 『 y 軸上の C の所を書いてある数はいくつのはずですか。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -2 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

であることがわかります。

- (4) 『 y 軸上の D の所を書いてある数はいくつのはずですか。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを $\frac{5}{2}$ にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} = \frac{25}{8}$$

であることがわかります。

- (5) 『 $x = -4$ のときの y の値を求めよ。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -4 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

であることがわかります。

- (6) 『 $x = -3$ のときの y の値を求めよ。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -3 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2}$$

であることがわかります。

- (7) 『 $x = -2$ のときの y の値を求めよ。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを -2 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

であることがわかります。

- (8) 『 $x = -0$ のときの y の値を求めよ。』という問題でしたね。

$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを 0 にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times 0^2 = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

であることがわかります。

- (9) 『 $x = \frac{5}{2}$ のときの y の値を求めよ。』という問題でしたね。

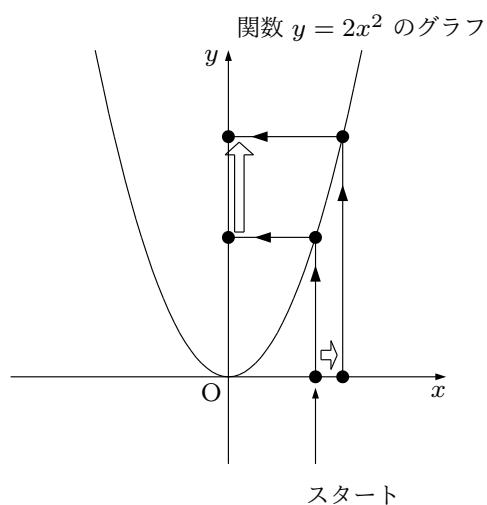
$y = \frac{1}{2}x^2$ という式の x のところを $\frac{5}{2}$ にして計算すればよいですね。ですから、

$$y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} = \frac{25}{8}$$

であることがわかります。

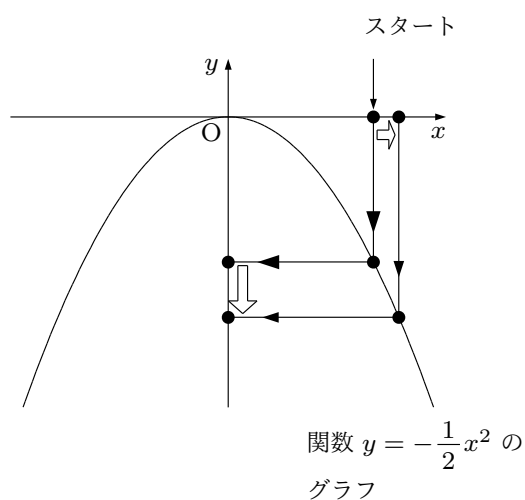
[本文へ戻る](#)

問 50. 関数 $y = 2x^2$ のグラフでは、右の図のように、入り口から入れる x の値を「スタートと書いてあるところの数」よりほんの少し増やすと、出口から出てくる y の値は「スタートのところに書いてある数」を入れたときに比べて増えます。



[本文へ戻る](#)

問 51. 関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフのグラフでは、右の図のように、入り口から入れる x の値を「スタートと書いてあるところの数」よりほんの少し増やすと、出口から出てくる y の値は「スタートのところに書いてある数」を入れたときに比べて減ります。



[本文へ戻る](#)

問 52. 例題 4 で学んだ方法で関数の変域を求める問題でしたね。

(1) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域

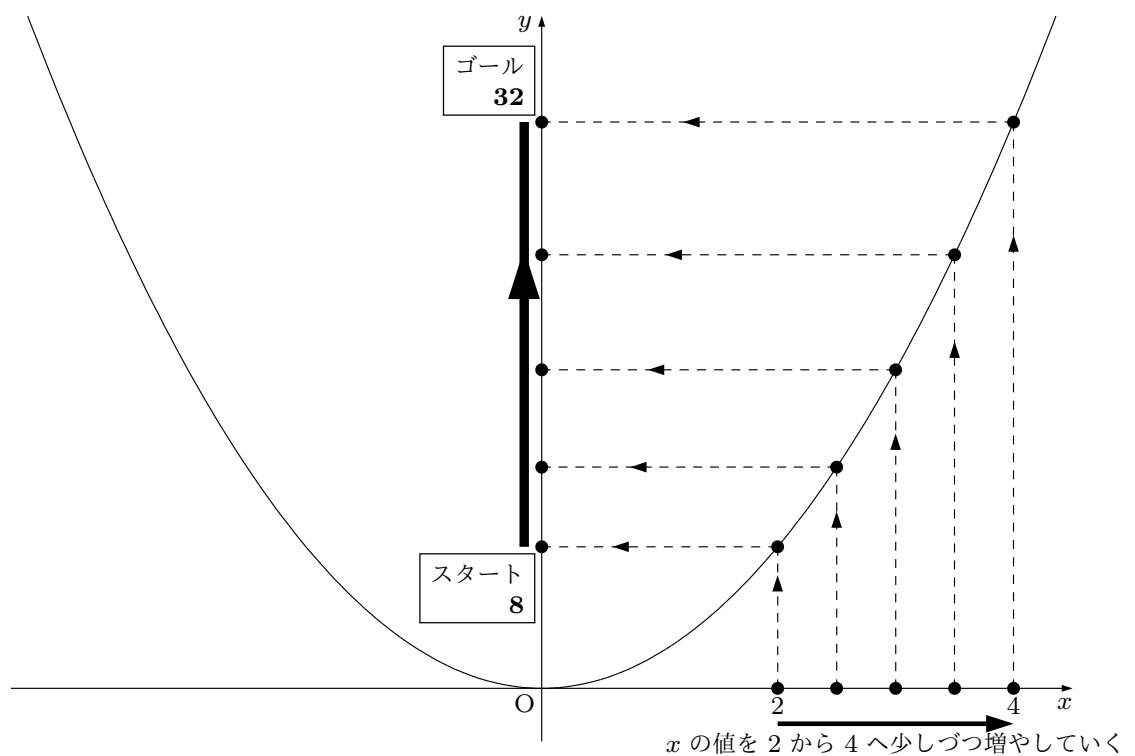
この関数では $y = 2x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = 2 \text{ のとき } y = 8$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = 32$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $2 \leq x \leq 4$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $8 \leq y \leq 32$ であることがわかります。

(2) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のときの y の変域

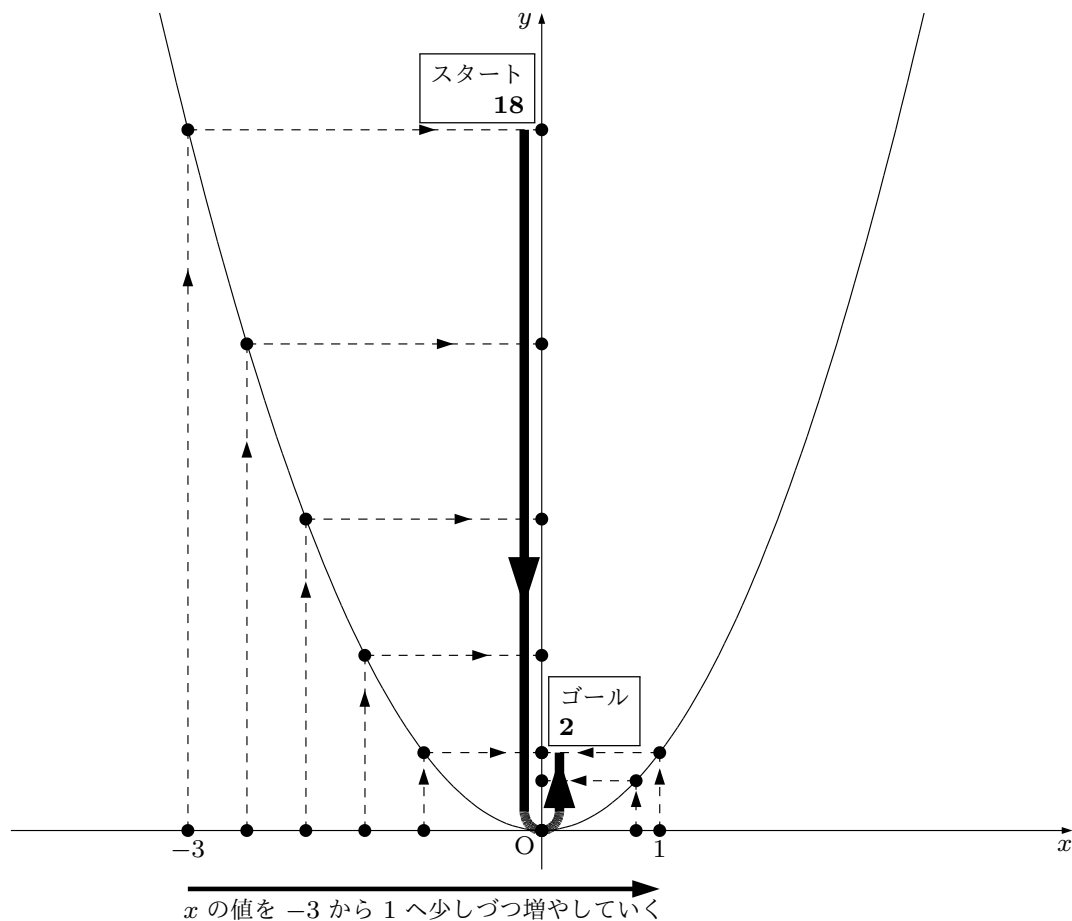
この関数では $y = 2x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -3 \text{ のとき } y = 18$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = 2$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-3 \leq x \leq 1$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $0 \leq y \leq 18$ であることがわかります。

(3) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-3 \leq x \leq 3$ のときの y の変域

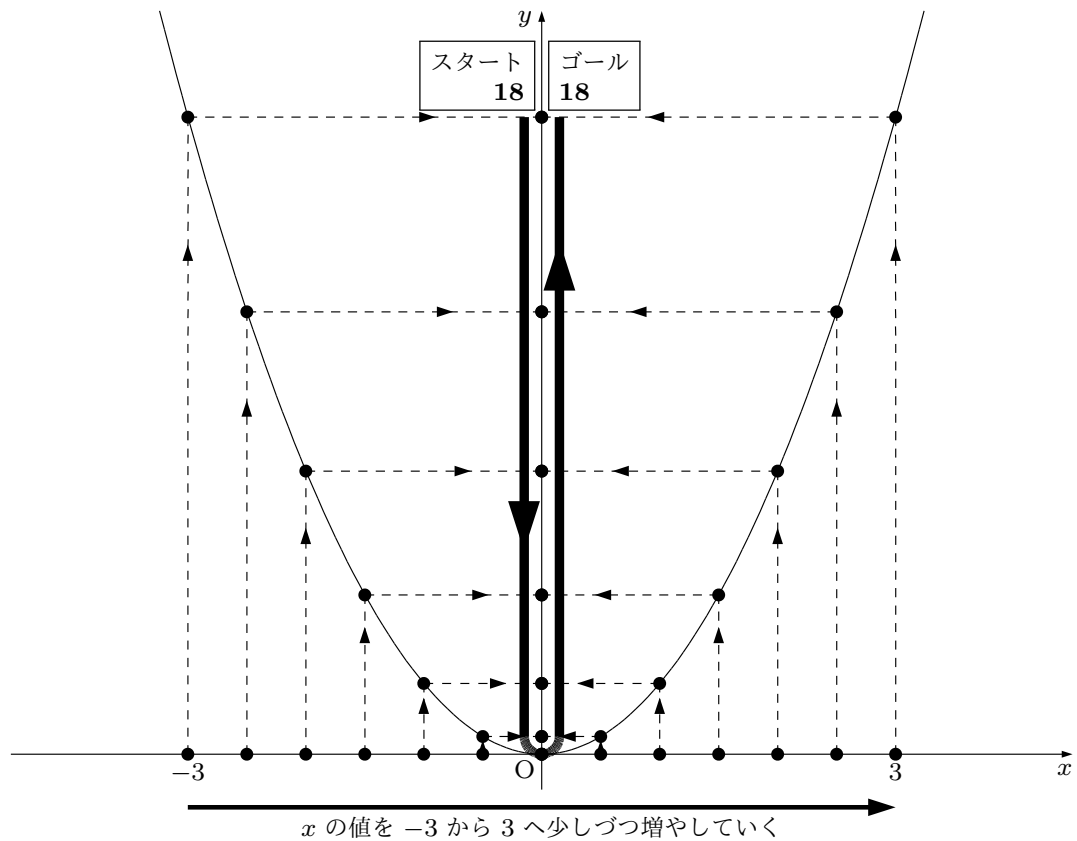
この関数では $y = 2x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -3 \text{ のとき } y = 18$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = 18$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-3 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $0 \leq y \leq 18$ であることがわかります。

(4) 関数 $y = 2x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq -1$ のときの y の変域

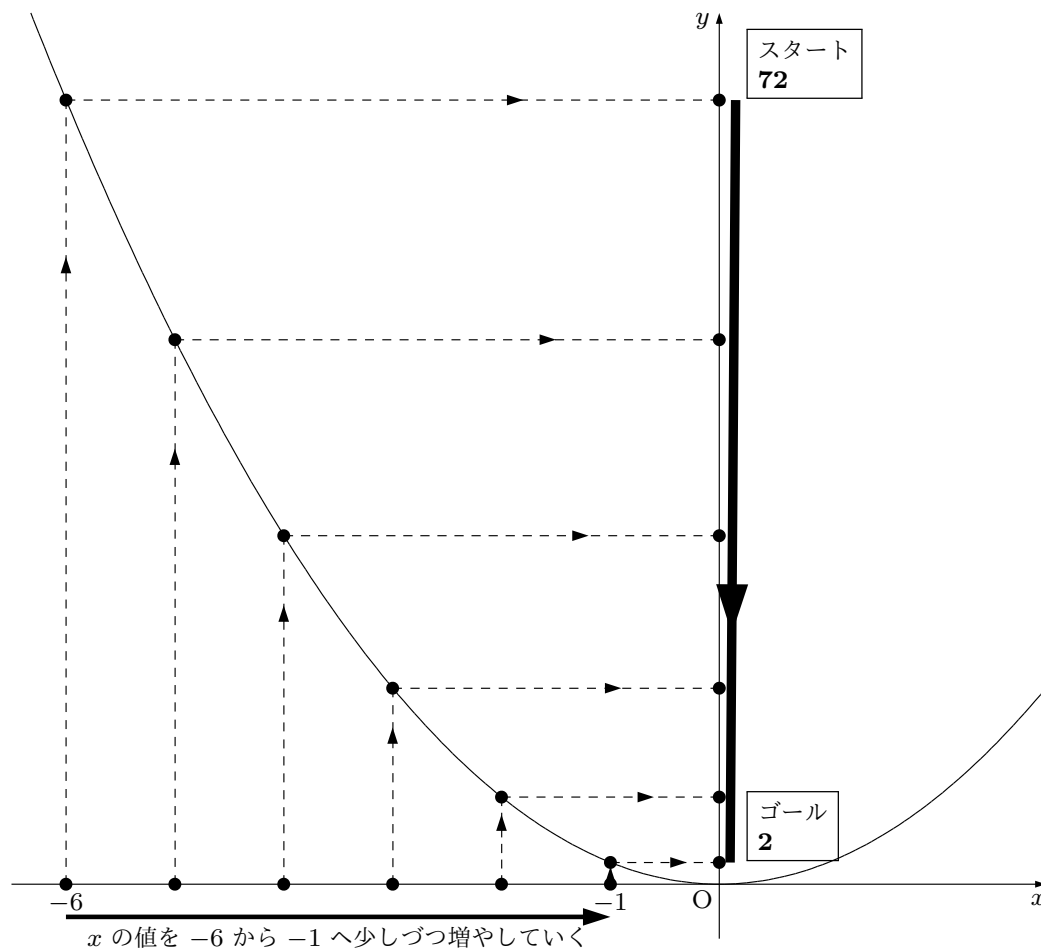
この関数では $y = 2x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -6 \text{ のとき } y = 72$$

$$x = -1 \text{ のとき } y = 2$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-6 \leq x \leq -1$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $2 \leq y \leq 72$ であることがわかります。

(5) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq 0$ のときの y の変域

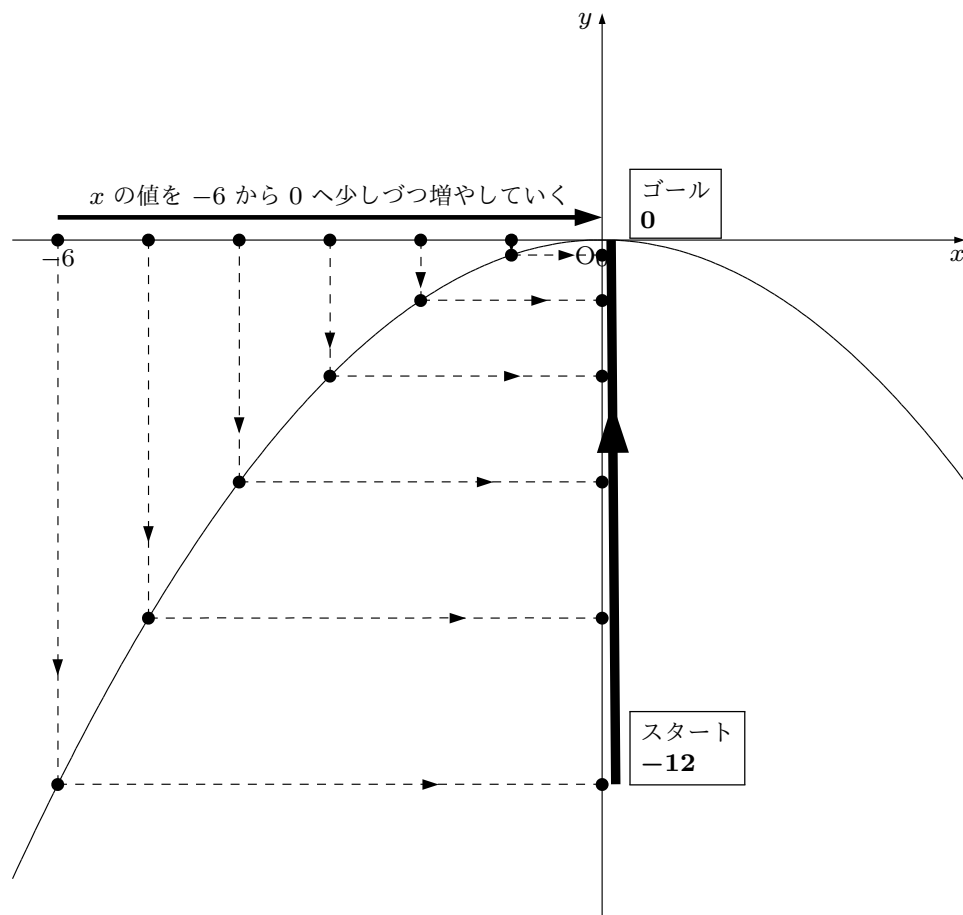
この関数では $y = -\frac{1}{3}x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -6 \text{ のとき } y = -12$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-6 \leq x \leq 0$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $-12 \leq y \leq 0$ であることがわかります。

(6) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-6 \leq x \leq 9$ のときの y の変域

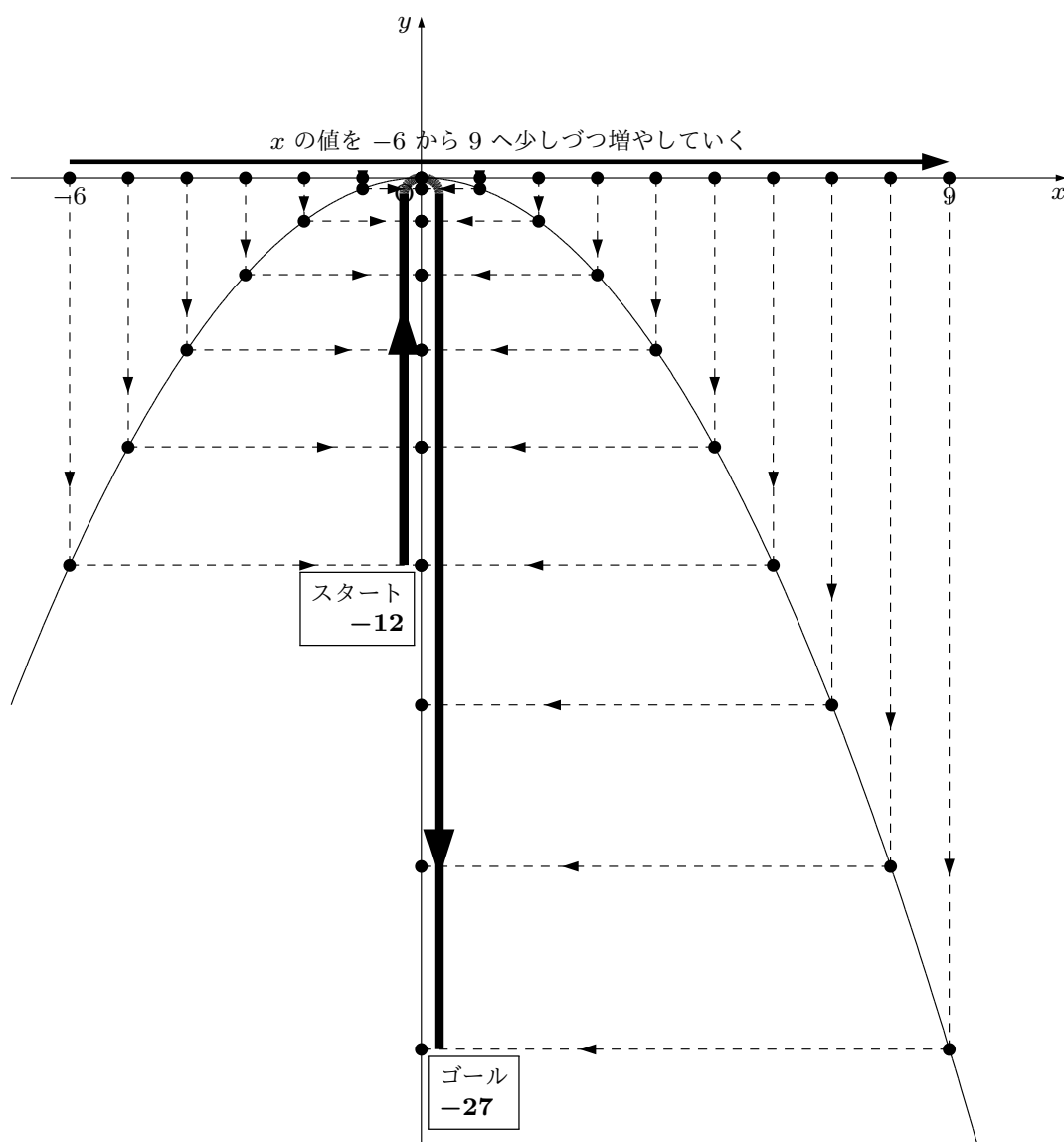
この関数では $y = -\frac{1}{3}x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -6 \text{ のとき } y = -12$$

$$x = 9 \text{ のとき } y = -27$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-6 \leq x \leq 9$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $-27 \leq y \leq 0$ であることがわかります。

(7) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $3 \leq x \leq 9$ のときの y の変域

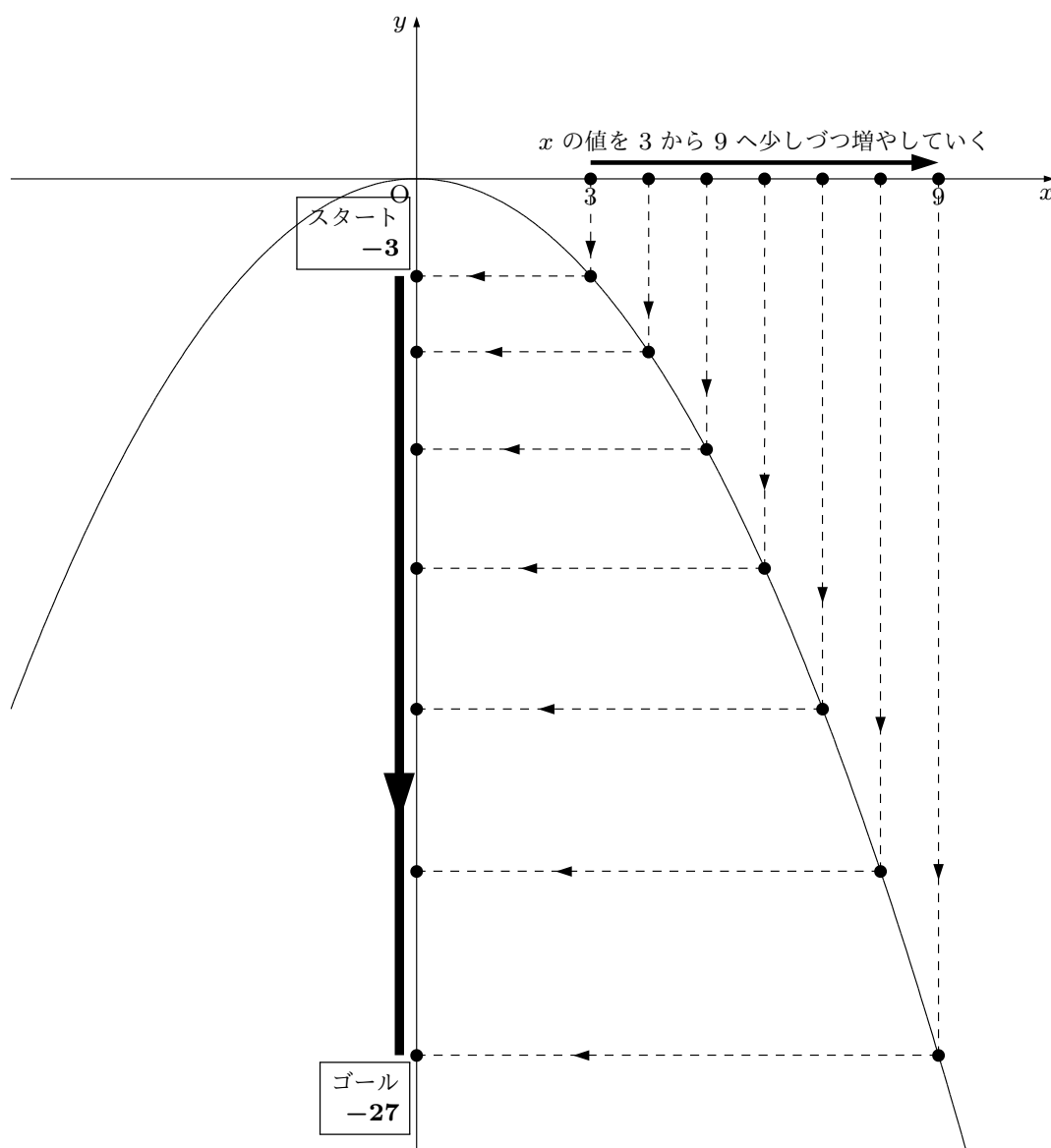
この関数では $y = -\frac{1}{3}x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = 3 \text{ のとき } y = -3$$

$$x = 9 \text{ のとき } y = -27$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $3 \leq x \leq 9$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $-27 \leq y \leq -3$ であることがわかります。

(8) 関数 $y = -\frac{1}{3}x^2$ で x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のときの y の変域

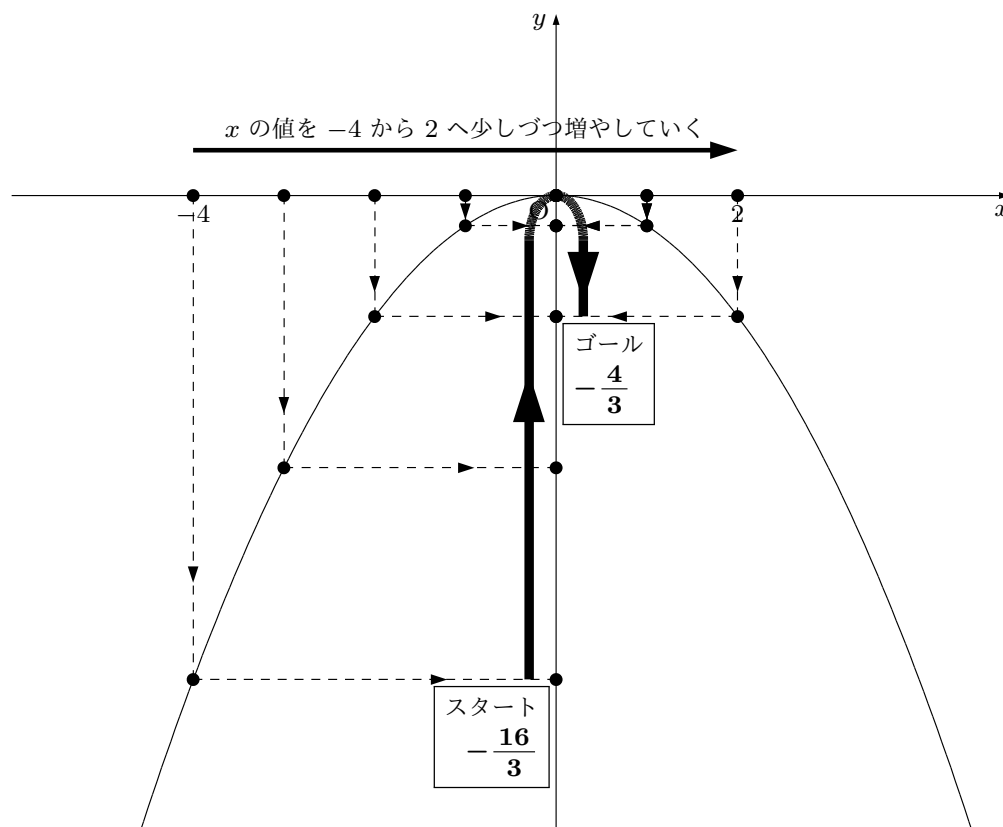
この関数では $y = -\frac{1}{3}x^2$ という式を使って計算すると、

$$x = -4 \text{ のとき } y = -\frac{16}{3}$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = -\frac{4}{3}$$

であるということがわかります。

では、この関数のグラフを作って、 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を読み取ってみましょう。次の図を見てください。



この図から、 y の変域は $-27 \leq y \leq 0$ であることがわかります。

[本文へ戻る](#)

問 53. 答えは本文に書いてあります。

[本文へ戻る](#)

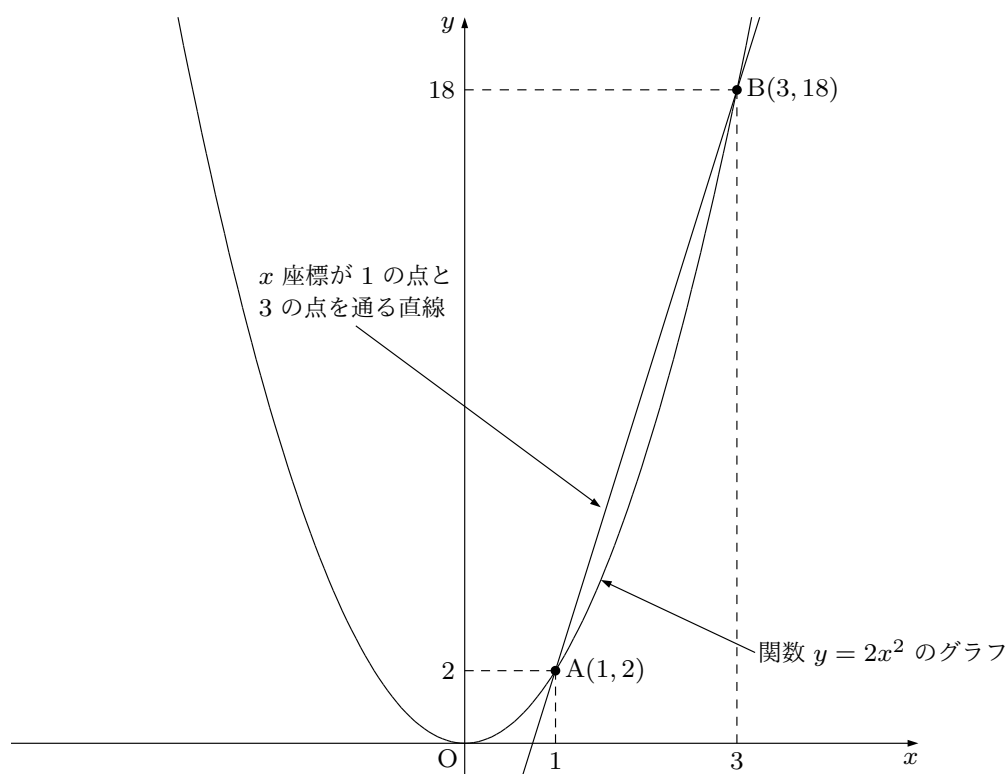
問 54. この問題の答えは、本文に詳しく説明してあります。111 ページから 113 ページをよく読んでください。

[本文へ戻る](#)

問 55.

- (1) 『まず、関数 $y = 2x^2$ のグラフを描きなさい。そして、関数 $y = 2x^2$ で x の値を 1 から 3 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフ上のどんな 2 点を通る直線の傾きになっているのか答えなさい。さらに、その直線の式も答えなさい。』という問題でしたね。

「関数 $y = 2x^2$ のグラフ」を描き、さらに、「 x 座標が 1 の点と 3 の点を通る直線」を描くと次のようになります。



関数 $y = 2x^2$ で x の値を 1 から 3 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフ上の「 x 座標が 1 の点と 3 の点」を通る直線の傾き等しくなっています。

ではこの直線の式を求めることにします。

そのために、まず、関数 $y = 2x^2$ で x の値を 1 から 3 へ変えたときの変化の割合

を計算します。

右の表を見てください。変化の割合を求めるために必要なことを計算してまとめておきました。

この表から

$$\text{変化の割合} = \frac{16}{2} = 8$$

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	2 増えている	↓
x	1→	3
y	2→	18
	↑	16 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

であることがわかりますね。

ということは、これから求めようとしている直線の傾きも 8 ということになりますね。ですから、求めようとしている直線の式を

$$y = 8x + b$$

とおくことができます。

求めようとしている直線でも、例えば $x = 1$ のとき $y = 2$ となるのですから、さっきの式で $x = 1$ とすると $y = 2$ となるわけです。つまり

$$2 = 8 \times 1 + b$$

が成り立っているはずですよ。この式から、

$$2 = 8 + b$$

さらに

$$b = -6$$

であることがわかります。

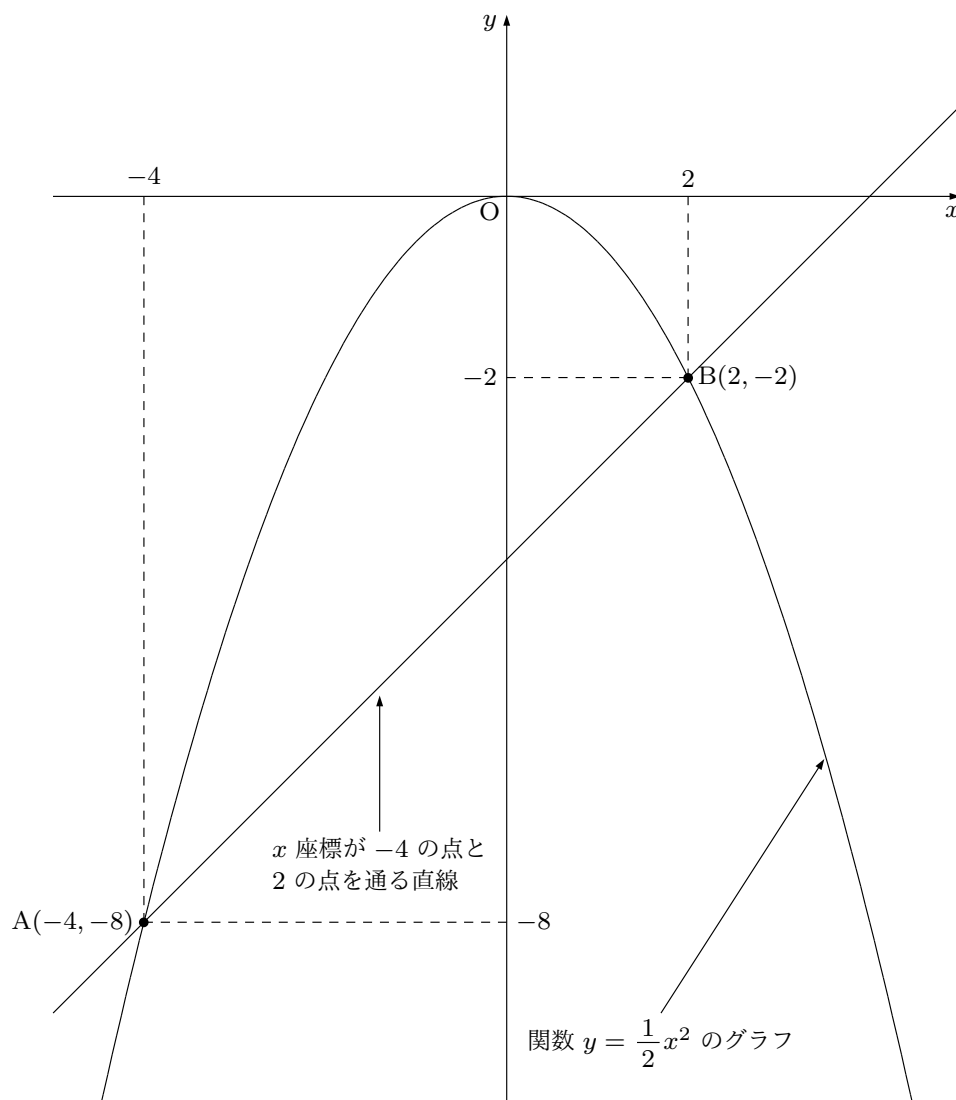
以上より、求めようとしていた直線の式は

$$y = 8x - 6$$

であることがわかりました。

- (2) 『まず、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描きなさい。そして、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ で x の値を -4 から 2 へ変えたときの変化の割合は、この関数のグラフ上のどんな 2 点を通る直線の傾きになっているのか答えなさい。さらに、その直線の式も答えなさい。』という問題でしたね。

「関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ」を描き、さらに、「 x 座標が -4 の点と 2 の点を通る直線」を描くと次のようになります。



関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ で x の値を -4 から 2 へ変えたときの変化の割合は、この関数の

グラフ上の「 x 座標が -4 の点と 2 の点」を通る直線の傾き等しくなっています。

ではこの直線の式を求めることにします。

そのために、まず、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ で x の値を -4 から 2 へ変えたときの変化の割合を計算します。

右の表を見てください。変化の割合を求めるために必要なことを計算してまとめておきました。

この表から

$$\text{変化の割合} = \frac{6}{6} = 1$$

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-4→	2
y	-8→	-2
	↑	6 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

であることがわかりますね。

ということは、これから求めようとしている直線の傾きも 1 ということになりますね。ですから、求めようとしている直線の式を

$$y = x + b$$

とおくことができます。

求めようとしている直線でも、例えば $x = 2$ のとき $y = -2$ となるのですから、さっきの式で $x = 2$ とすると $y = -2$ となるわけです。つまり

$$-2 = 2 + b$$

が成り立っているはずですが。この式からさらに

$$b = -4$$

であることがわかります。

以上より、求めようとしていた直線の式は

$$y = x - 4$$

であることがわかりました。

[本文へ戻る](#)

問 56. 『 x の 2 乗に比例する関数 $y = ax^2$ があるとします。ただし、今のところ a がいくつなのかはわかっていません。この関数で、 x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 であるとしたら、 a はいくつのはずなのか、以下の文のように考えることにしました。空欄に正しい数、式を記入しなさい。』という問題でしたね。

この問題では、関数の決まりをあらわす式 $y = ax^2$ の中に謎の数 a が入っています。そして「 x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 である」という手がかりがあります。 a はいくつなのかわかっていないので関数の決まり自体ははっきりしていませんが、手がかりを使えるようにするため、 a は a のままでいつものように変化の割合を求めてみることにします。

いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくると、右のようになりますね。

この表から関数 $y = ax^2$ で x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合を求めると、

$$\text{変化の割合} = \frac{\boxed{-15a}}{\boxed{3}} = -5a$$

となりますよね。

一方、この問題では関数 $y = ax^2$ で x が -4 から -1 へ変わるときの変化の割合は 10 になると書いてあるのですから、今求めた $-5a$ と $\boxed{10}$ は等しいはずです。つまり、

$$-5a = \boxed{10}$$

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	$\boxed{3}$ 増えている	↓
x	-4→	-1
y	$\boxed{16a}$→	\boxed{a}
	↑	$\boxed{-15a}$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

となっているわけです。これで謎の数 a を見つけるための式ができました。この式から、

$$a = \frac{\boxed{10}}{\boxed{-5}} = -2$$

であることがわかりますね。

[本文へ戻る](#)

問 57. 『例題 6 の解答の続きを考えて例題 6 を最後まで解きなさい。』ということでした。そして、例題 6 は『 x が -2 から 4 へ変えるとき、2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = x + 4$ の変化の割合は等しくなっているとき a の値を求めなさい。』という問題でしたね。

いつものように、まず、関数 $y = ax^2$ について、変化の割合を求めるための表をつくと、右のようになりますね。

この表から、関数 $y = ax^2$ で x が -2 から 4 へ変わるときの変化の割合を求めると、

$$\text{変化の割合} = \frac{12a}{6} = 2a$$

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	6 増えている	↓
x	-2	4
y	$4a$	$16a$
	↑	$12a$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

となりますよね。

一方この問題では、例題 6 の解答の中で、

いちいちまじめに表なんかつくらなくても、1 次関数 $y = x + 4$ で x が -2 から 4 へ変えるときの変化の割合は 1 であるということがわかってしまう

というところまで説明しました。

ということは、

$$2a = 1$$

が成り立つことになります。この式より

$$a = \frac{1}{2}$$

であることがわかりますね。

[本文へ戻る](#)

問 58. 『関数 $y = 2x^2$ で、 x が a から $a + 3$ へ変わるときの変化の割合は -6 であるとしたら a はいくつのはずなのか、以下の文のように考えることにしました。空欄に正しい数、式を記入しなさい。』という問題でしたね。

a は a のままで変化の割合を求めてみることにしましょう。

まず、いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくることにします。そのために必要なことを計算してみます。

x は a から $a + 3$ へ変わるので $\boxed{3}$ 増えていますよね。

一方 y は $\boxed{2a^2}$ から $\boxed{2(a+3)^2}$ へ変わります。ですからどれだけ増えているか調べるためにひき算をしてみると、次のように、 y は、

$$\begin{aligned} 2(a+3)^2 - (2a^2) &= 2(a^2 + 6a + 9) - (2a^2) \\ &= \boxed{2a^2 + 12a + 18 - 2a^2} \\ &= \boxed{12a + 18} \end{aligned}$$

増えていることがわかります。

ですから、今調べたことを表にまとめると右のようになりますね。

というわけで、

$$\text{変化の割合} = \frac{12a + 18}{3} = \boxed{4a + 6}$$

となりますよね。

ところでこの問題では、変化の割合は -6 になると書いてあるのですから今求めた $4a + 6$ と $\boxed{-6}$ は等しいはず。つまり、

$$4a + 6 = -6$$

が成り立っているわけです。これで謎の数 a を発見するための式ができました。あとはこの式を解いて a の値を求めれば良いわけです。次のように計算をすすめることができま

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	$\boxed{3}$ 増えている	↓
x	a→	$a + 3$
y	$\boxed{2a^2}$→	$\boxed{2(a+3)^2}$
	↑	$\boxed{12a + 18}$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

す。まず、左辺と右辺から 6 をひくと、

$$4a + 6 - 6 = -6 - 6$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$4a = \boxed{-12}$$

となりますね。つぎは左辺と右辺を 4 で割ると、

$$a = \boxed{-3}$$

となりますよね。これで謎の数 a を求めることができました。

[本文へ戻る](#)

問 59. 変化の割合についての問題でしたね。

- (1) 『関数 $y = ax^2$ で x が 1 から 4 へ変わるときの変化の割合は 10 であるという。 a の値を求めよ。』という問題でした。

この問題では、関数の決まりをあらわす式 $y = ax^2$ の中に謎の数 a が入っています。そして「 x が 1 から 4 へ変わるときの変化の割合は 10 である」という手がかりがあります。 a はいくつなのかわかっていないので関数の決まり自体ははっきりしていませんが、手がかりを使えるようにするため、 a は a のままでいつものように変化の割合を求めてみることにします。

いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくると、右のようになりますね。

この表から関数 $y = ax^2$ で x が 1 から 4 へ変わるときの変化の割合を求めると、

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	3 増えている	↓
x	1→	4
	↓		↓
y	a→	$16a$
	↑	15a 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

$$\text{変化の割合} = \frac{15a}{3} = 5a$$

となりますよね。

一方、この問題では関数 $y = ax^2$ で x が 1 から 4 へ変わるときの変化の割合は 10 になると書いてあるのですから、今求めた $5a$ と 10 は等しいはずですよ。つまり、

$$5a = 10$$

となっているわけです。これで謎の数 a を見つけるための式ができました。この式から、

$$a = 2$$

であることがわかりますね。

- (2) x が -3 から 2 へ変わるとき、2 つの関数 $y = ax^2$ と $y = 2x + 5$ の変化の割合は等しくなるという。 a の値を求めよ。

いつものように、まず、関数 $y = ax^2$ について、変化の割合を求めるための表をつくると、右のようになりますね。

この表から、関数 $y = ax^2$ で x が -3 から 2 へ変わるときの変化の割合を求めると、

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	5 増えている	↓
x	-3→	2
y	$9a$→	$4a$
	↑	$-5a$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

$$\text{変化の割合} = \frac{-5a}{5} = -a$$

となりますよね。

一方一次関数の変化の割合についての驚くべき事実を知っている人は

いちいちまじめに表なんかつくらなくても、1 次関数 $y = 2x + 5$ で x が -3 から 2 へ変えるときの変化の割合は 2 であるということがわかってしまう

のですよね。

ということは、

$$-a = 2$$

が成り立つことになります。この式より

$$a = -2$$

であることがわかりますね。

- (3) 『関数 $y = -2x^2$ で x が a から $a + 1$ へ変わるときの変化の割合は 2 であるという。 a の値を求めよ。』という問題でしたね。

a は a のままで変化の割合を求めてみることにしましょう。

まず、いつものように、まず、変化の割合を求めるための表をつくることにします。

そのために必要なことを計算してみます。

x は a から $a + 1$ へ変わるので 1 増えていますよね。

一方 y は $-2a^2$ から $-2(a + 1)^2$ へ変わります。ですからどれだけ増えているか調べるためにひき算を使うと、次のように、 y は、

$$\begin{aligned} -2(a + 1)^2 - (-2a^2) &= -2(a^2 + 2a + 1) - (-2a^2) \\ &= -2a^2 - 4a - 2 + 2a^2 \\ &= -4a - 2 \end{aligned}$$

増えていることがわかります。

ですから、今調べたことを表にまとめると右のようになりますね。

というわけで、

$$\text{変化の割合} = \frac{-4a - 2}{1} = -4a - 2$$

となりますよね。

	先に入れた x		あとに入れた x
	↓	1 増えている	↓
x	a→	$a + 1$
y	$-2a^2$→	$-2(a + 1)^2$
	↑	$-4a - 2$ 増えている	↑
	先に出てきた y		あとに出てきた y

ところでこの問題では、変化の割合は 2 になると書いてあるのですから今求めた $-4a - 2$ と 2 は等しいはずです。つまり、

$$-4a - 2 = 2$$

が成り立っているわけです。これで謎の数 a を発見するための式ができました。あとはこの式を解いて a の値を求めれば良いわけです。次のように計算をすすめることができます。まず、左辺と右辺に 4 をたすと、

$$-4a - 2 = 2$$

となりますが、仲間の部品をまとめて見かけをマシにすると、

$$-4a = 4$$

となりますね。つぎは左辺と右辺を -4 で割ると、

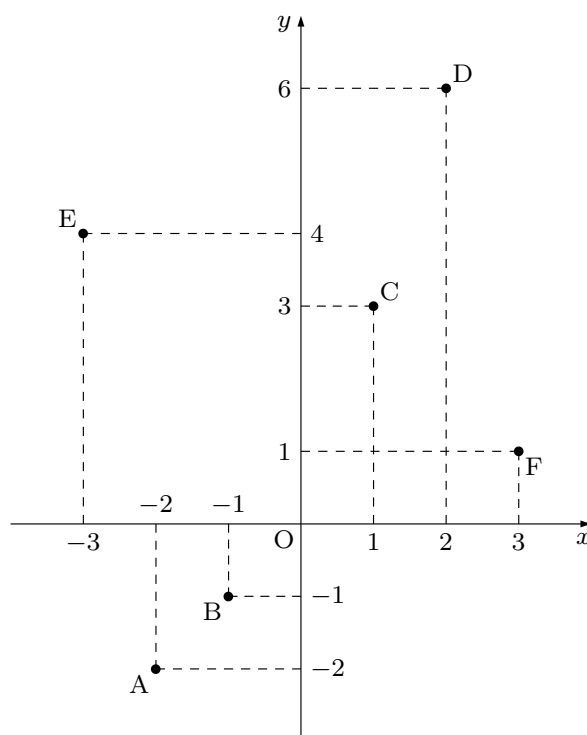
$$a = -1$$

となりますよね。これで謎の数 a を求めることができました。

[本文へ戻る](#)

問 60. 『右の図の点 A、B、C、D、E、F のうち、関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にある点を全て選びなさい。ただし、関数 $y = 2x + 1$ のグラフを描いてはいけません。計算だけで判断して選びなさい。』という問題でしたね。

それぞれの点の座標ついて、 $y = 2x + 1$ という式を満たしているかどうか調べれば良いわけです。



- 点 A(-2, 2) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 A の x 座標は -2 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を -2 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times (-2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

となります。これは点 A の y 座標である -2 と一致しません。ですから点 A は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にはありません。

- 点 B(-1, -1) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 B の x 座標は -1 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を -1 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

となります。これは点 A の y 座標である -1 と一致しています。ですから点 A は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあります。

- 点 C(1, 3) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 C の x 座標は 1 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を 1 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

となります。これは点 C の y 座標である 3 と一致しています。ですから点 C は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあります。

- 点 D(2, 6) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 D の x 座標は 2 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を 2 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

となります。これは点 D の y 座標である 6 と一致しません。ですから点 D は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にはありません。

- 点 E(-3, 4) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 E の x 座標は -3 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を -3 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times (-3) + 1 = -6 + 1 = -5$$

となります。これは点 E の y 座標である 4 と一致しません。ですから点 E は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にはありません。

- 点 F(3, 1) が関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にあるかどうか調べると・・・

点 F の x 座標は 3 です。そこで、 $y = 2x + 1$ という式の x の値を 3 にして y の値を計算すると、

$$y = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$$

となります。これは点 F の y 座標である 1 と一致しません。ですから点 F は関数 $y = 2x + 1$ のグラフの上にはありません。

[本文へ戻る](#)

問 61. グラフを描かないで関数 $y = -3x + 4$ のグラフのことを考える問題でしたね。

(1) 次の点から、関数 $y = -3x + 4$ のグラフの上にある点をすべて選ぶ問題でした。

- | | | |
|-------------|-----------|-----------|
| ① A(-4, 16) | ② B(0, 3) | ③ C(0, 4) |
| ④ D(2, -2) | ⑤ E(2, 5) | ⑥ F(3, 8) |

例 21 の説明や、問 60 の解答が理解できた人のために答えだけ書いておきます。

関数 $y = -3x + 4$ のグラフの上にある点は A(-4, 16)、C(0, 4)、D(2, -2) です。

(2) (1) の点 A、B、C、D、E、F 以外で、関数 $y = -3x + 4$ のグラフの上にある点を 2 つ見つけ座標を答えるのでしたね。

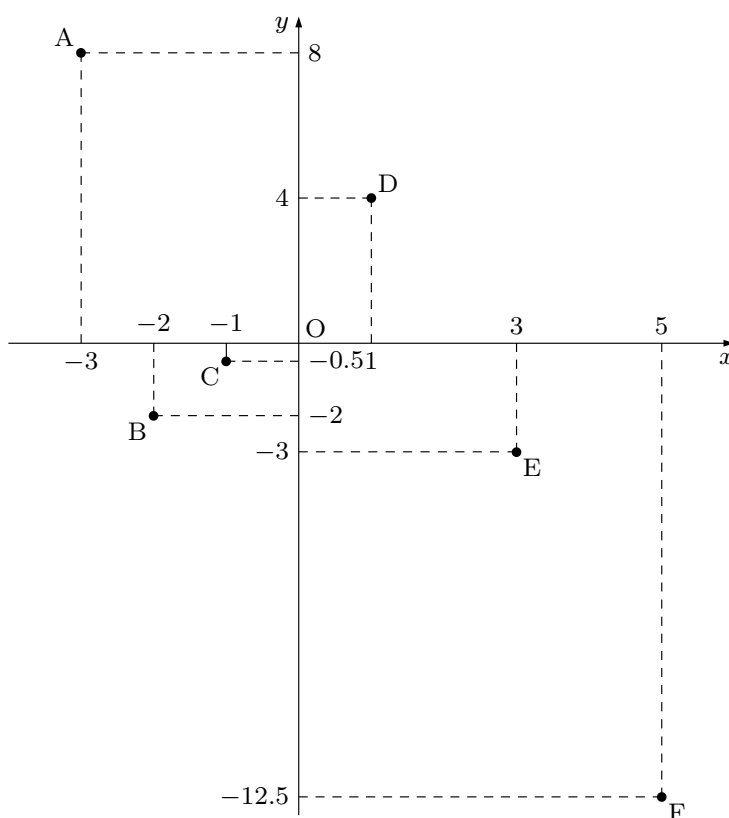
例えば、とりあえず 2 つ挙げると、(-5, 19)、(-3, 13) があります。

(この他にも (-2, 10)、(-1, 7)、(1, 1)、(3, -5) などがあります。)

[本文へ戻る](#)

問 62. 『右の図の点 A、B、C、D、E、F のうち、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にある点を全て選びなさい。ただし、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフを描いてはいけません。計算だけで判断して選びなさい。』という問題でしたね。

例 21 の説明や、問 60 の解答が理解できた人のために答えだけ書いておきます。



関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にある点は $B(-2, -2)$ 、 $C(-1, -0.5)$ 、 $F(-5, -12.5)$ です。

[本文へ戻る](#)

問 63. グラフを描かないで関数 $y = 2x^2$ のグラフのことを考える問題でした。

(1) 例 21 の説明や、問 60 の解答が理解できた人のために答えだけ書いておきます。

関数 $y = 2x^2$ のグラフの上にある点を 5 個見つけ、座標を答えると、例えば、
 $(-2, 8)$ 、 $(-1, 2)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 8)$ があります。

(2) $y = 2x^2$ という式を満たす x と y の値の組を 5 組答えると、例えば、
 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$
 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}$ があります。

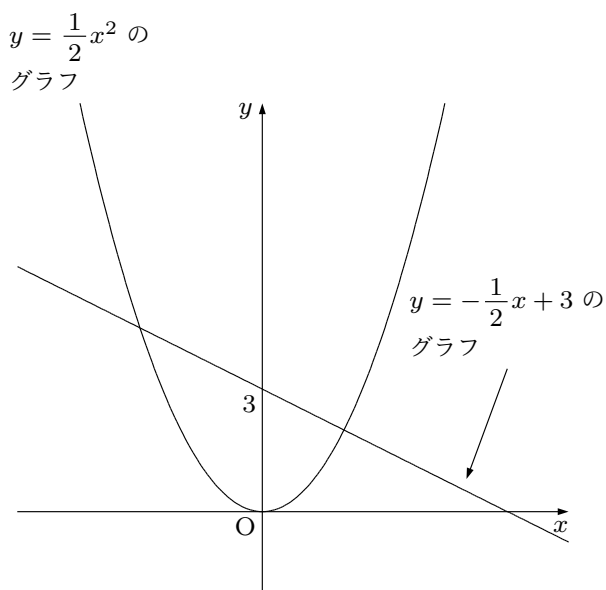
[本文へ戻る](#)

問 64. 2 つの関数のグラフの交点に関する問題でした。

(1) 『関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2 つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの 2 つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』ということでしたね。

この問題に出てくる 2 つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの 2 つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの 2 つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。



まず関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ

ですが、これはどうせ上に開いた放物線、つまり \cup のような形の曲線になるとい

うことを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が 3 ですから y 軸上の点 $(0, 3)$ を通るということや、傾きが $-\frac{1}{2}$ ですから右へ 2 進むと下へ 1 進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2 つの関数のグラフは 2 つの点で交わっているようですね。

では交点を求めることにしましょう。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。

-大切な物の見方-

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフの交点は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = \frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = -\frac{1}{2}x + 3$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = \frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = -\frac{1}{2}x + 3$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = \frac{1}{2}x^2$ という式と $y = -\frac{1}{2}x + 3$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方

程式は

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。(説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。)

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $\frac{1}{2}x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $\frac{1}{2}x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 3 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、③式はどうみても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右辺から $-\frac{1}{2}x + 3$ をひくと、

$$\frac{1}{2}x^2 - (-\frac{1}{2}x + 3) = -\frac{1}{2}x + 3 - (-\frac{1}{2}x + 3)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に2をかけることにしましょう。すると、

$$2 \times \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \right) = 2 \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 + x - 6 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。
(因数分解が無理な場合は2次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の見かけをかえると、

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

となりますね。この式は $x + 3$ と $x - 2$ をかけると0になるという意味の式ですから、少なくとも $x + 3$ と $x - 2$ のうちどちらかは0であると判断できます。つまり、

$$x + 3 = 0, \quad \text{または} \quad x - 2 = 0$$

ということになります。というわけで

$$x + 3 = 0 \text{ の場合、} x = -3$$

となり、

$$x - 2 = 0 \text{ の場合、} x = 2$$

となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x = -3 \quad \text{または} \quad x = 2$$

ということになるわけです。

これで交点の x 座標が発見出来ました。2つの x の値が出てきたということは、交点は2つあるということを意味しています。

では次に、交点の y 座標を発見することにしましょう。 x の値が求められているので、①と②のうちのどちらか好きな方を使えば y の値が求められるわけです。

まず、 $x = -3$ のとき、たとえば①を使うと、

$$y = \frac{1}{2} \times (-3)^2 = \frac{9}{2}$$

となりますね。ですから交点の座標は $\left(-3, \frac{9}{2}\right)$ ですね。

また、 $x = 2$ のとき、たとえば①を使うと、

$$y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

となりますね。ですから交点の座標は $(2, 2)$ ですね。

これで 2 つの交点の座標が発見出来ました。答えは、

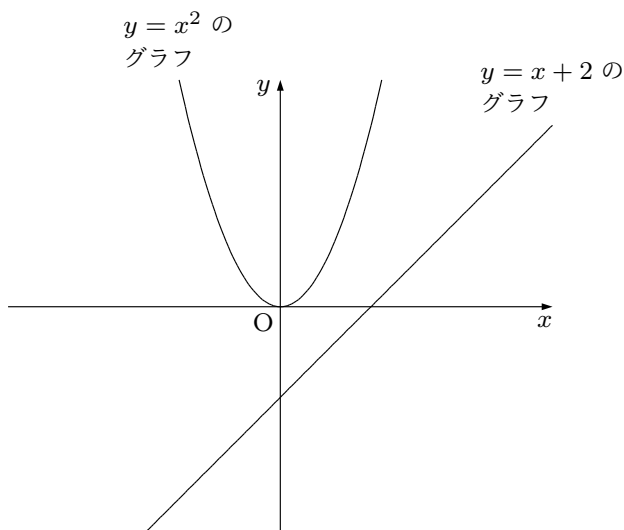
$$\left(-3, \frac{9}{2}\right) \text{ と } (2, 2)$$

ですね。

- (2) 『数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = x - 2$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2 つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの 2 つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』という問題でしたね。

この問題に出てくる 2 つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの 2 つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの 2 つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。



まず関数 $y = x^2$ のグラフですが、これはどうせ上に開いた放物線、つまり \cup のような形の曲線になるということを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = x - 2$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が -2 ですから y 軸上の点 $(0, -2)$ を通るということや、傾きが 1 ですから右へ 1 進むと上へ 1 進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは全く交わらないように思えますね。

では本当に交わらないのか計算で調べてみましょう。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。

-大切な物の見方-

関数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = x - 2$ のグラフの交点があるとする、交点は関数 $y = x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = x - 2$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = x^2$ という式を満たすと同時に $y = x - 2$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = x^2$ という式を満たすと同時に $y = x - 2$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = x^2$ という式と $y = x - 2$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方

程式は

$$\begin{cases} y = x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = x - 2 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。(説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。)

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と x^2 は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている x^2 に取り替えることができますね。そうすると、

$$x^2 = x - 2 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、③式はどうみても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右辺から $x - 2$ をひくと、

$$x^2 - (x - 2) = x - 2 - (x - 2)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 - x + 2 = 0$$

となります。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。(因数分解が無理な場合は2次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、残念なことに、この式の左辺は因数分解できそうにもありませんね。で

すから 2 次方程式の解の公式を使ってみます。どんな公式だったのか思い出してみ
 ましょう。たしか

— 重要な事実：二次方程式の解を求めるための公式 —

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 a 、 b 、 c がいくつであるのかよく注意
 して、 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数と $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を計算する
 と求められてしまう。

ということでしたよね。（何のことかわからない人は今すぐ「方程式 3」のテキス
 トを復習してください。よくわからないまま先に進むと大変なことになってしま
 います。）

この公式を使うと、 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ という部品の計算が必要になりますよね。そこ
 でとりあえず、この部品の計算だけしてみます。解こうとしている方程式は
 $x^2 - x + 2 = 0$ ですから a は 1、 b は -1 、 c は 2 ですね。ですから、

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 2} = \sqrt{1 - 8} = \sqrt{-7}$$

となりますね。ちょっと困ったことがおきましたね。 $\sqrt{\quad}$ のマークの中に -7 など
 という「マイナスの数」があります。 $\sqrt{-7}$ って「2 乗すると -7 になる数」ですよ
 ね。そんな数はないですよ。だって、どんな数も、2 乗するとプラスになるか、
 せいぜい 0 になるのですから。つまり、2 次方程式の解の公式を使って解を求め
 ようとしても、 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ という部品が「ありえないモノ」になってしまうわけ
 です。ですから解はないのです。でもこれはちっともおかしなことではありません。
 解がないというのは、交点がないということを意味しているのです。

- (3) 『関数 $y = 3x^2$ のグラフと関数 $y = -3x + 6$ のグラフをひとつの座標平面に描き、

2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』ということでしたね。

この問題に出てくる2つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの2つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの2つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。

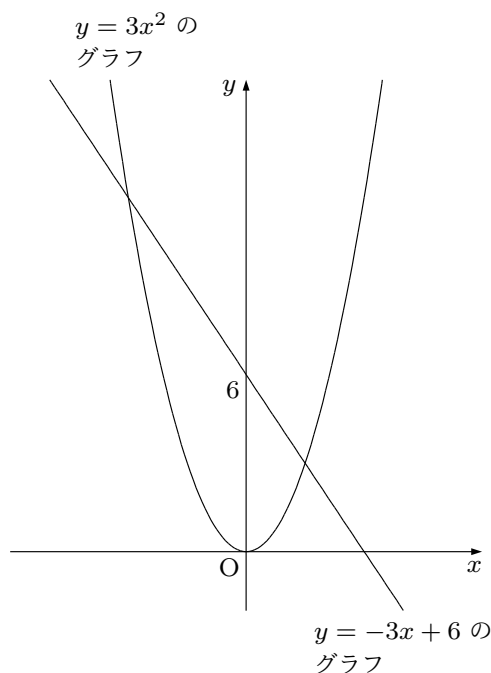
まず関数 $y = 3x^2$ のグラフですが、これはどうせ上に開いた放物線、つまり \cup のような形の曲線になるということを私

たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = -3x + 6$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が6ですから y 軸上の点 $(0, 6)$ を通るということや、傾きが -3 ですから右へ1進むと下へ3進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは2つの点で交わっているようですね。

では交点を求めることにしましょう。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。



-大切な物の見方-

関数 $y = 3x^2$ のグラフと関数 $y = -3x - 6$ のグラフの交点は、関数 $y = 3x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = -3x + 6$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = 3x^2$ という式を満たすと同時に $y = -3x + 6$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = 3x^2$ という式を満たすと同時に $y = -3x + 6$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = 3x^2$ という式と $y = -3x + 6$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方程式は

$$\begin{cases} y = 3x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = -3x + 6 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。（説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。）

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $3x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $3x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$3x^2 = -3x + 6 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、

③式はどうみても 2 次方程式ですね。2 次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔
しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右
辺から $-3x + 6$ をひくと、

$$3x^2 - (-3x + 6) = -3x + 6 - (-3x + 6)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$3x^2 + 3x - 6 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に $\frac{1}{3}$ をかけることにしましょう。すると、

$$\frac{1}{3} \times (3x^2 + 3x - 6) = \frac{1}{3} \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 + x - 2 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。
(因数分解が無理な場合は 2 次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでし
たね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の
見かけをかえると、

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

となりますね。この式は $x + 2$ と $x - 1$ をかけると 0 になるという意味の式ですか
ら、少なくとも $x + 2$ と $x - 1$ のうちどちらかは 0 であると判断できます。つまり、

$$x + 2 = 0, \quad \text{または} \quad x - 1 = 0$$

ということになります。というわけで

$$x + 2 = 0 \text{ の場合、 } x = -2$$

となり、

$$x - 1 = 0 \text{ の場合、 } x = 1$$

となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x = -2 \quad \text{または} \quad x = 1$$

ということになるわけです。

これで交点の x 座標が発見出来ました。2 つの x の値が出てきたということは、交点は 2 つあるということを意味しています。

では次に、交点の y 座標を発見することにしましょう。 x の値が求められているので、①と②のうちのどちらか好きな方を使えば y の値が求められるわけです。

まず、 $x = -2$ のとき、たとえば①を使うと、

$$y = 3 \times (-2)^2 = 12$$

となりますね。ですから交点の座標は $(-2, 12)$ ですね。

また、 $x = 1$ のとき、たとえば①を使うと、

$$y = 3 \times 1^2 = 3$$

となりますね。ですから交点の座標は $(1, 3)$ ですね。

これで 2 つの交点の座標が発見出来ました。答えは、

$$(-2, 12) \text{ と } (1, 3)$$

ですね。

- (4) 『関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -3x + 12$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』ということでしたね。

この問題に出てくる2つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの2つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの2つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。

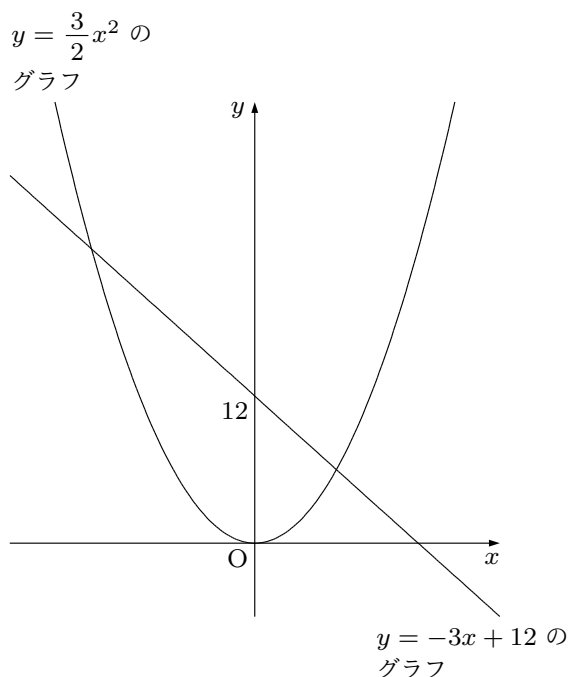
まず関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフですが、これはどうせ上に開いた放物線、つ

まり \cup のような形の曲線になるということを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = -3x + 12$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が12ですから y 軸上の点 $(0, 12)$ を通るということや、傾きが -3 ですから右へ1進むと下へ3進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは2つの点で交わっているようです。

では交点を求めることにしましょう。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。



-大切な物の見方-

関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = -3x + 12$ のグラフの交点は、関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = -3x + 12$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = \frac{3}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = -3x + 12$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = \frac{3}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = -3x + 12$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = \frac{3}{2}x^2$ という式と $y = -3x + 12$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方程式は

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = -3x + 12 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。（説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。）

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $\frac{3}{2}x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $\frac{3}{2}x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$\frac{3}{2}x^2 = -3x + 12 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、③式はどうみても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔

しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右辺から $-3x + 6$ をひくと、

$$\frac{3}{2}x^2 - (-3x + 12) = -3x + 12 - (-3x + 12)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に 2 をかけることにしましょう。すると、

$$2 \times \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x - 12 \right) = 2 \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$3x^2 + 6x - 24 = 0$$

となりますね。次は左辺と右辺に $\frac{1}{3}$ をかけることにしましょう。すると、

$$\frac{1}{3} \times (3x^2 + 6x - 24) = \frac{1}{3} \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。(因数分解が無理な場合は 2 次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の見かけをかえると、

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

となりますね。この式は $x + 4$ と $x - 2$ をかけると 0 になるという意味の式ですか

ら、少なくとも $x+4$ と $x-2$ のうちどちらかは 0 であると判断できます。つまり、

$$x+4=0 \quad \text{または} \quad x-2=0$$

ということになります。というわけで

$$x+4=0 \text{ の場合、} x=-4$$

となり、

$$x-2=0 \text{ の場合、} x=2$$

となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x=-4 \quad \text{または} \quad x=2$$

ということになるわけです。

これで交点の x 座標が発見出来ました。2 つの x の値が出てきたということは、交点は 2 つあるということを意味しています。

では次に、交点の y 座標を発見することにしましょう。 x の値が求められているので、①と②のうちのどちらか好きな方を使えば y の値が求められるわけです。

まず、 $x=-4$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y=-3 \times (-4) + 12 = 24$$

となりますね。ですから交点の座標は $(-4, 24)$ ですね。

また、 $x=2$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y=-3 \times 2 + 12 = 6$$

となりますね。ですから交点の座標は $(2, 6)$ ですね。

これで 2 つの交点の座標が発見出来ました。答えは、


$$(-4, 24) \text{ と } (2, 6)$$

ですね。

- (5) 『関数 $y = -x^2$ のグラフと関数 $y = 2x - 3$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』ということでしたね。

この問題に出てくる2つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの2つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの2つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。

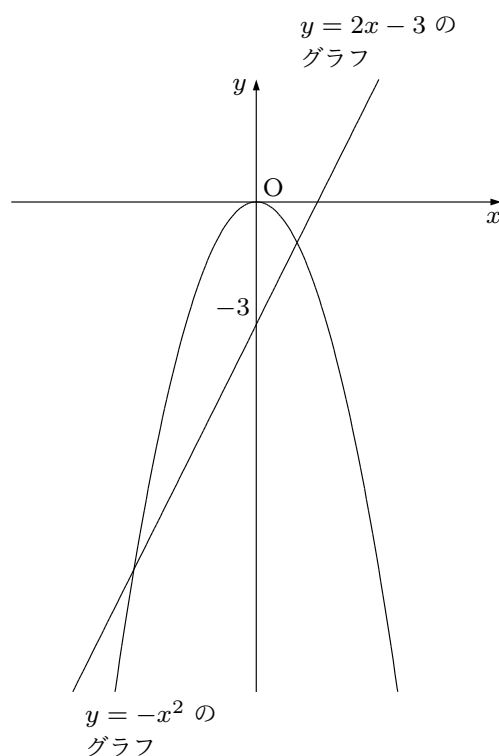
まず関数 $y = -x^2$ のグラフですが、これはどうせ下に開いた放物線、つまり  のような形の曲線になるということを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていること

も知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = 2x - 3$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が -3 ですから y 軸上の点 $(0, -3)$ を通るということや、傾きが 2 ですから右へ 1 進むと上へ 2 進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは2つの点で交わっているようですね。

では交点を求めることにしましょう。そのときに、次のような物の見方をすること



が大切です。

-大切な物の見方-

関数 $y = -x^2$ のグラフと関数 $y = 2x - 3$ のグラフの交点は、関数 $y = -x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = 2x - 3$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = -x^2$ という式を満たすと同時に $y = 2x - 3$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = -x^2$ という式を満たすと同時に $y = 2x - 3$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = -x^2$ という式と $y = 2x - 3$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方程式は

$$\begin{cases} y = -x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = 2x - 3 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。（説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。）

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつもあり式もいくつもあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $-x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $-x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$-x^2 = 2x - 3 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、

③式はどうみても 2 次方程式ですね。2 次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔
しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右
辺から $-3x + 6$ をひくと、

$$-x^2 - (2x - 3) = 2x - 3 - (2x - 3)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に -1 をかけることにしましょう。すると、

$$-1 \times (-x^2 - 2x + 3) = -1 \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。
(因数分解が無理な場合は 2 次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでし
たね。)

今の場合、残念なことにこの式の左辺は因数分解できそうにはありません。ですか
ら 2 次方程式の解の公式を使ってみます。どんな公式だったのか思い出してみま
しょう。たしか

— 重要な事実：二次方程式の解を求めるための公式 —

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 a 、 b 、 c がいくつであるのかよく注意
して、 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数と $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を計算する
と求められてしまう。

ということでしたよね。(何のことかわからない人は今すぐ「方程式 3」のテキス

トを復習してください。よくわからないまま先に進むと大変なことになってしまいます。)

解こうとしている方程式は $x^2 + 2x - 6 = 0$ ですから a は 1、 b は 2、 c は -6 ですね。ですから、

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{4 + 24}}{2} \\ &= \frac{-2 + \sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{7}}{2} \\ &= -1 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

という解と

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-2 - \sqrt{4 + 24}}{2} \\ &= \frac{-2 - \sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{7}}{2} \\ &= -1 - \sqrt{7} \end{aligned}$$

という解が見つかります。

これで交点の x 座標が発見出来ました。2つの x の値が出てきたということは、交点は2つあるということを意味しています。

では次に、交点の y 座標を発見することにしましょう。 x の値が求められているので、①と②のうちのどちらか好きな方を使えば y の値が求められるわけです。

まず、 $x = -1 + \sqrt{7}$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y = -1 + \sqrt{7} - 2 = -3 + \sqrt{7}$$

となりますね。ですから交点の座標は $(-1 + \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7})$ ですね。

また、 $x = -1 - \sqrt{7}$ のとき、たとえば②を使うと、

$$y = -1 - \sqrt{7} - 2 = -3 - \sqrt{7}$$

となりますね。ですから交点の座標は $(-1 - \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7})$ ですね。

これで2つの交点の座標が発見出来ました。答えは、

$$(-1 + \sqrt{7}, -3 + \sqrt{7}) \text{ と } (-1 - \sqrt{7}, -3 - \sqrt{7})$$

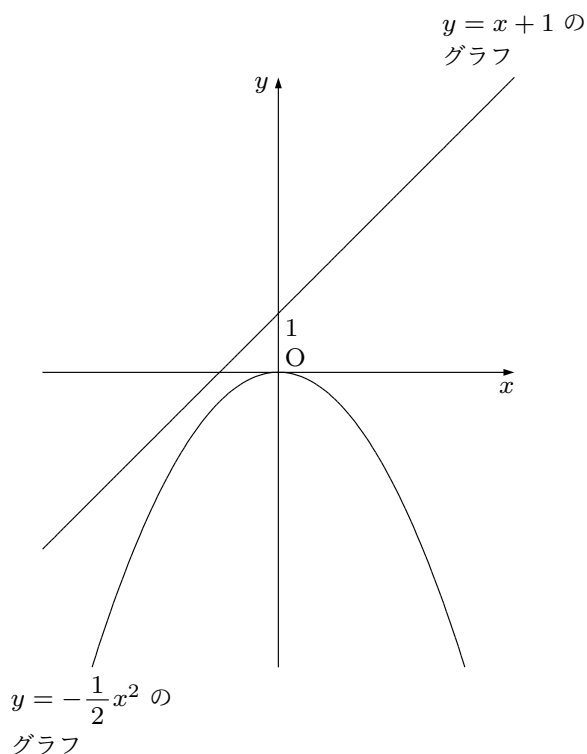
ですね。

- (6) 『関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 1$ のグラフをひとつの座標平面に描き、2つの関数のグラフが交わるのかどうか調べなさい。そしてもしこの2つのグラフに交点があれば、交点の座標を計算で求めなさい。』ということでしたね。

この問題に出てくる2つの関数のグラフを描くと右の図のようになりますよね。

念のため、どうやってこの2つの関数のグラフを作ったのか簡単に説明しておきます。実を言うところの2つのグラフはどちらもわりといい加減に作ったものです。

まず関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフですが、こ



れはどうせ下に開いた放物線、つまり \wedge のような形の曲線になるということを私たちは知っています。また、原点を通り、 y 軸について対称になっていることも知っています。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

一方 $y = x + 1$ のグラフですが、これはどうせ直線になるということを私たちは知っています。また式を見れば、切片が1ですから y 軸上の点 $(0, 1)$ を通るということや、傾きが1ですから右へ1進むと上へ1進むように直線が傾いているということがわかるわけです。これらのことだけを気にして図のようなグラフを描いたのです。

完成したグラフをみると、2つの関数のグラフは全く交わらないように思えますね。

では本当に交わらないのか計算で調べてみましょう。そのときに、次のような物の見方をすることが大切です。

-----大切な物の見方-----

関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x + 1$ のグラフの交点があるとして、交点は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフの上にあると同時に関数 $y = x + 1$ のグラフの上にもあるわけです。ということは、交点の x 座標と y 座標の値は $y = -\frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = x + 1$ という式も満たしていることになります。だから交点の座標を求めるには $y = -\frac{1}{2}x^2$ という式を満たすと同時に $y = x + 1$ という式も満たしている x と y の値を求めれば良いわけです。つまり、 $y = -\frac{1}{2}x^2$ という式と $y = x + 1$ という式を連立してできる連立方程式を解けば良いのです。

では、連立方程式を解いて交点の座標を求めることにしましょう。解くべき連立方

程式は

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = x + 1 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。(説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。)

これから謎の数 x と y をなんとかして見つけていきます。謎の数がいくつかあり式もいくつかあるような方程式を解くコツは、式をうまく組み合わせて謎の数が1つだけの式を作っていくことでしたね。

①にでてきている y と②に出てきている y は同じ数です。また、①によれば y と $-\frac{1}{2}x^2$ は同じ数です。ですからたとえば、②に出てきている y を①にでてきている $-\frac{1}{2}x^2$ に取り替えることができますね。そうすると、

$$-\frac{1}{2}x^2 = x + 1 \quad \dots\dots\dots ③$$

という式ができます。これで文字が1つだけの式を作ることができました。この、③式はどうみても2次方程式ですね。2次方程式の解き方は大丈夫ですよ。昔しっかり練習しましたよね。ですから簡単に説明しましょう。まず、③の左辺と右辺から $x - 2$ をひくと、

$$-\frac{1}{2}x^2 - (x + 1) = x + 1 - (x + 1)$$

となりますが、仲間の部品をまとめたりかっこをはずして見かけをマシにすると、

$$-\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$$

となります。次は左辺と右辺に -2 をかけることにしましょう。すると、

$$-2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - x - 1 \right) = -2 \times 0$$

となりますが、かっこをはずして見かけをマシにすると、

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。
(因数分解が無理な場合は 2 次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、残念なことに、この式の左辺は因数分解できそうにもありませんね。ですから 2 次方程式の解の公式を使ってみます。どんな公式だったのか思い出してみましょう。たしか

— 重要な事実：二次方程式の解を求めるための公式 —

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は、 a 、 b 、 c がいくつであるのかよく注意して、 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数と $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ という数を計算すると求められてしまう。

ということでしたよね。(何のことかわからない人は今すぐ「方程式 3」のテキストを復習してください。よくわからないまま先に進むと大変なことになってしまいます。)

この公式を使うと、 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ という部品の計算が必要になりますよね。そこでとりあえず、この部品の計算だけしてみます。解こうとしている方程式は $x^2 + 2x + 2 = 0$ ですから a は 1、 b は 2、 c は 2 ですね。ですから、

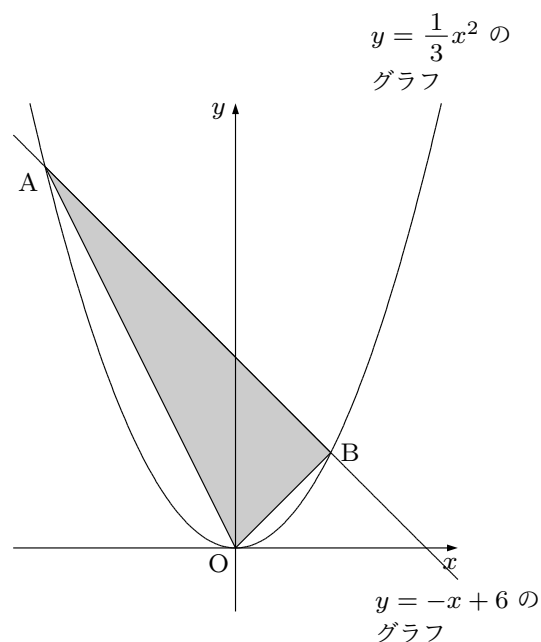
$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 2} = \sqrt{4 - 8} = \sqrt{-4}$$

となりますね。ちょっと困ったことがおきましたね。 $\sqrt{\quad}$ のマークの中に -4 などという「マイナスの数」があります。 $\sqrt{-4}$ って「2 乗すると -4 になる数」ですよ。そんな数はないですよ。だって、どんな数も、2 乗するとプラスになるか、せいぜい 0 になるのですから。つまり、2 次方程式の解の公式を使って解を求め

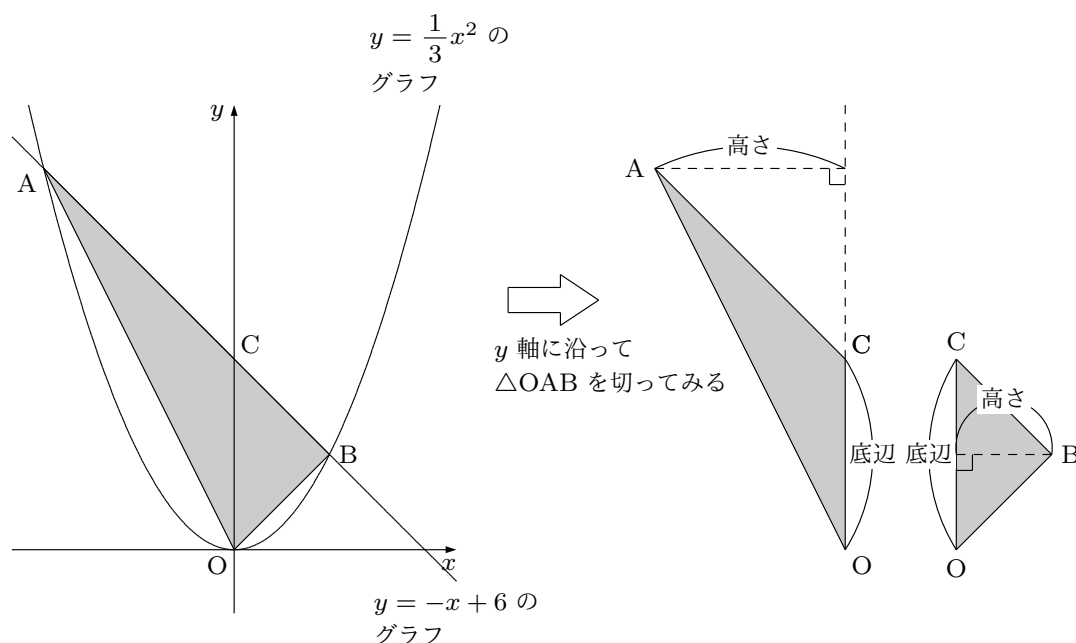
ようとしても、 $\sqrt{b^2 - 4ac}$ という部品が「ありえないモノ」になってしまうわけです。ですから解はないのです。でもこれはちっともおかしなことではありません。解がないというのは、交点がないということを意味しているのです。

[本文へ戻る](#)

問 65. 『右の図のように、実は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフと関数 $y = -x + 6$ のグラフは2つの点で交わります。ここでは2つの交点をそれぞれ、点A、点Bと呼ぶことにします。O、A、Bをまっすぐ結ぶと $\triangle OAB$ ができますが、座標の1目盛りの長さを1cmと考えて、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。』という問題でしたね。



x 軸や y 軸が出てくる話では、なるべく斜めの長さは使わないで水平方向の長さや垂直方向の長さを使って問題を解くほうが良いということになります。では、この問題の $\triangle OAB$ の面積を水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って求めるにはどうすればよいのでしょうか。 $\triangle OAB$ の辺はどれも「斜め」ですよ。ということは、この図のままでは水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って面積を求めるなんて無理です。なにか工夫をしなくてはいいけません。実は、次の図のように $\triangle OAB$ を y 軸に沿って2つの三角形に分けて考えるとよいのです。



この図をよく見てください。図の右側には $\triangle OAB$ を2つに分けてできた三角形が2枚できています。 $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ です。この2つの三角形について、「底辺」や「高さ」を図のように考えることにすれば、水平方向の長さや垂直方向の長さだけを使って面積を求めることができますね。では、面積の計算にとりかかりましょう。

まず、 $\triangle OAC$ の面積を求めることにしましょう。

底辺の長さを求めるには点 C の場所がわかればよいですね。点 C は関数 $y = -x + 6$ のグラフと y 軸の交点です。つまり、関数 $y = -x + 6$ の切片になっているところです。関数 $y = -x + 6$ の切片はこの式を見れば6であることがすぐにわかりますね。（どういふことなのかよくわからない人は、今すぐ「関数2」のテキストを探して1次関数を全て復習してください。）ですから、点 C のところには6と書いてあるはずです。よって、底辺の長さは6であることがわかりました。

次に、高さを求めることにします。そのためには点 A の場所がわかればよいですね。点 A は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフと関数 $y = -x + 6$ のグラフの交点ですね。ところで、交点の座標の求め方は例題8で詳しく学習しましたよね。そうです、連立方程式を解くの

でしたね。解くべき連立方程式はもちろん、

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 & \dots\dots\dots ① \\ y = -x + 6 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

ですね。説明しやすいようにそれぞれの式に番号をつけておきました。では、この連立方程式を解いていきましょう。

まず、①の左辺の y と右辺の $\frac{1}{3}x^2$ は同じものです。また①の y と②の y は同じものです。ですから、①の y を $\frac{1}{3}x^2$ に取り替えることができます。すると、

$$\frac{1}{3}x^2 = -x + 6$$

となりますね。これで謎の文字が1つだけの方程式ができました。この方程式はどう見ても2次方程式ですね。ではこの2次方程式を解いて謎の数 x を発見することにしましょう。等式を変形するためにやっても良いことを使うと、

$$\frac{1}{3}x^2 + x - 6 = 0$$

となりますね。次はこの式の左辺と右辺に3をかけてみます。すると、

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

となりますね。。次はこの式の左辺が因数分解できるかどうか考えるのですよね。(因数分解が無理な場合は2次方程式の解の公式のような奥の手を使うのでしたね。)

今の場合、幸いなことにこの式の左辺は因数分解できますね。因数分解して左辺の見かけをかえると、

$$(x + 6)(x - 3) = 0$$

となりますね。この式は $x + 6$ と $x - 3$ をかけると0になるという意味の式ですから、少なくとも $x + 6$ と $x - 3$ のうちどちらかは0であると判断できます。つまり、

$$x + 6 = 0 \quad \text{または} \quad x - 3 = 0$$

ということになります。ということは

$$x + 6 = 0 \text{ の場合、} x = -6$$

となり、

$$x - 3 = 0 \text{ の場合、} x = 3$$

となりますね。ですから、謎の数 x の正体は、

$$x = -6 \text{ または } x = 3$$

ということになるわけです。

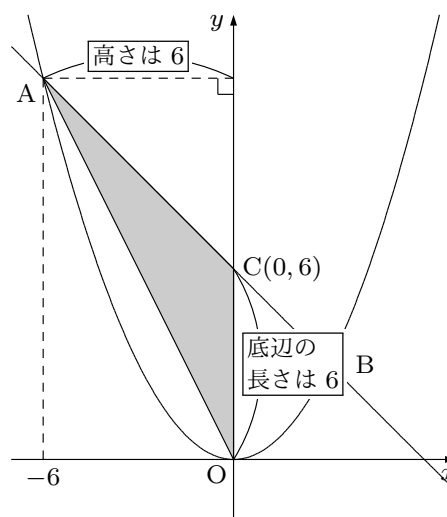
これで交点の x 座標が発見出来ました。2つの x の値が出てきたということは、交点は2つあるということを意味しています。ここでちょっと立ち止まって考えてみると、いま私たちが知りたいと思っている点 A ですが、図をみるとわかるように、この点は2つある交点のうち x 座標がマイナスになっている点ですよね。ということは点 A の x 座標は（3ではなく） -6 ということになりますね。（点 B の x 座標が3ということになりますね。）

ここまでの調査で $\triangle OAC$ の底辺の長さや高さがわかりました。調査結果を右の図にまとめておきます。これで $\triangle OAC$ の面積を求める準備ができましたね。では $\triangle OAC$ の面積を求めることにします。三角形の面積は「 $\frac{1}{2}$ 」かける「底辺の長さ」かける「高さ」で求められるのですから、

$$\triangle OAC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 (\text{cm}^2)$$

となりますね。

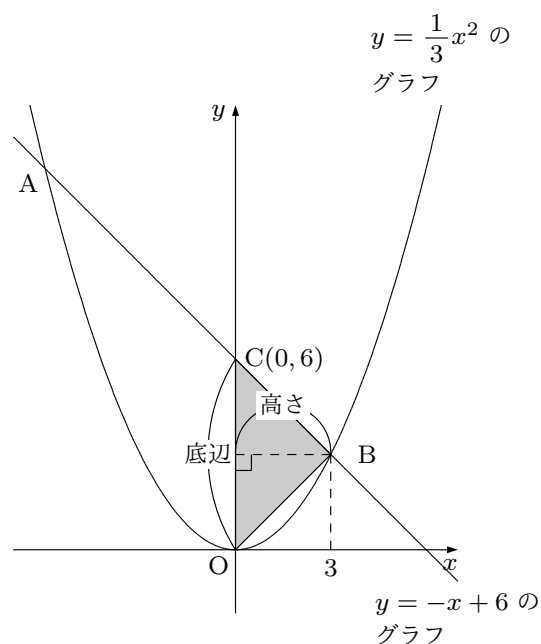
次は $\triangle OBC$ の面積を求めましょう。



右の図を見てください。△OAC のときと同じようにして求めることができますね。この三角形の底辺の長さは 6 で、高さは 3 ですよね。(底辺の長さは点 C の場所からわかり、高さは点 B の x 座標からわかるのですよね。) ですから、

$$\triangle OBC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9 (\text{cm}^2)$$

となりますね。



私たちはこれまでに、△OAC を分割してできた 2 つの三角形 △OAC と △OBC の面積を求めました。△OAC の面積は $18 (\text{cm}^2)$ で △OBC の面積は $9 (\text{cm}^2)$ でしたね。ですから、

$$\triangle OAB \text{ の面積} = \triangle OAC \text{ の面積} + \triangle OBC \text{ の面積} = 18 + 9 = 27 (\text{cm}^2)$$

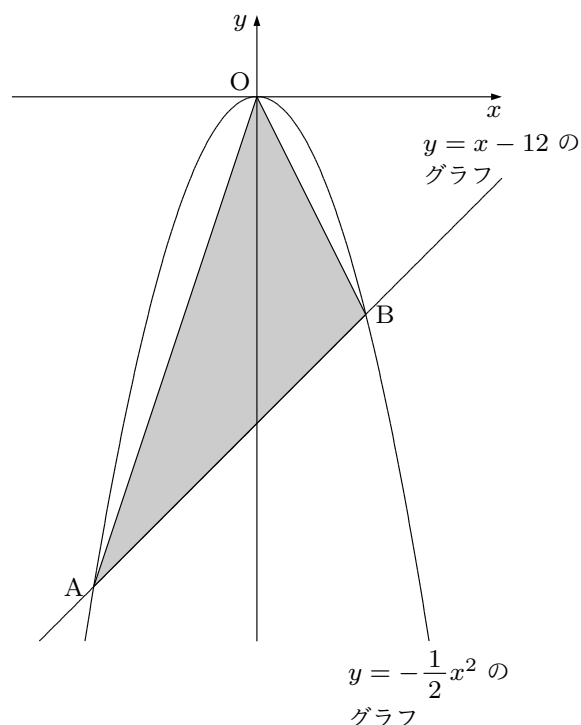
となります。これでこの問題は解決しました。

[本文へ戻る](#)

問 66. 『右の図のように、実は関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = x - 12$ のグラフは 2 つの点で交わります。ここでは 2 つの交点をそれぞれ、点 A、点 B と呼ぶことにします。O、A、B をまっすぐ結ぶと $\triangle OAB$ ができますが、座標の 1 目盛りの長さを 1 cm と考えて、 $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。』という問題でしたね。

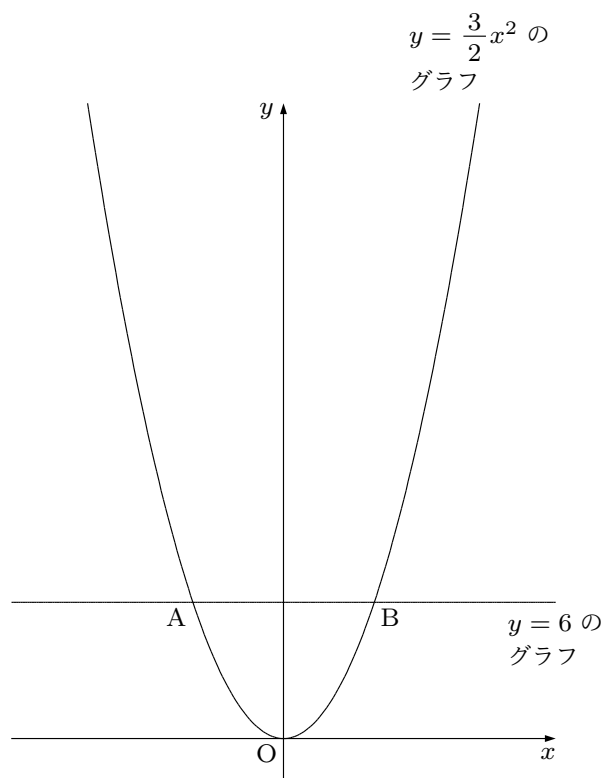
例題 9 の解答と問 65 の解答が理解出来た人のため、答えだけ書いておきます。

$\triangle OAB$ の面積は 42 cm^2 です。



[本文へ戻る](#)

問 67. 『右の図のように、実は関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフと関数 $y = 6$ のグラフは 2 つの点で交わります。ここでは 2 つの交点をそれぞれ、点 A、点 B と呼ぶことにします。また、この図のは描かれていませんが、関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフ上にあり x 座標が -4 である点を C と呼ぶことにします。以下の問に答えなさい。ただし、座標の 1 目盛りの長さを 1 cm と考えることにします。』ということでした。



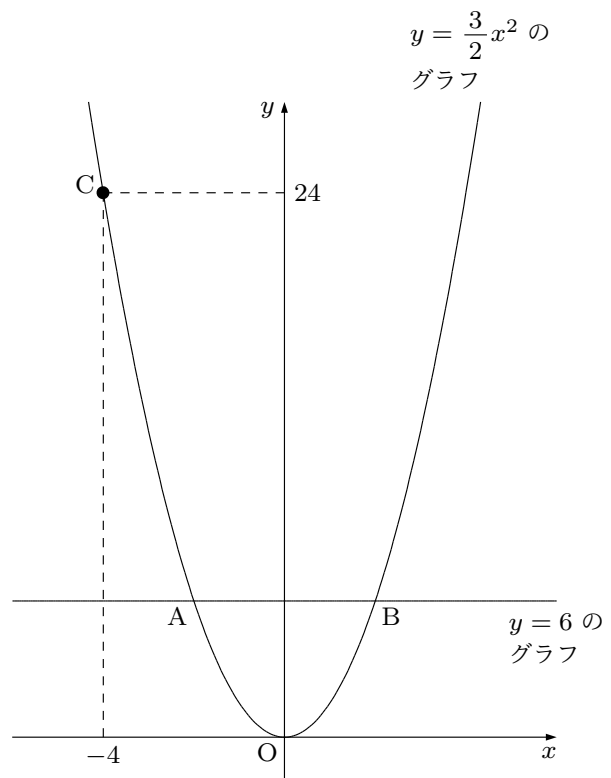
(1) 『点 C の座標を求めなさい。』という問題でしたね。

関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフ上にあり x 座標が -4 である点を C と呼ぶことにしたので、C の y 座標を知りたいければ $y = \frac{3}{2}x^2$ という式で x を -4 にして計算すれば良いわけです。計算してみると

$$y = \frac{3}{2} \times (-4)^2 = \frac{3}{2} \times 16 = 24$$

となります。ですから C 座標は $(-4, 24)$ ということです。

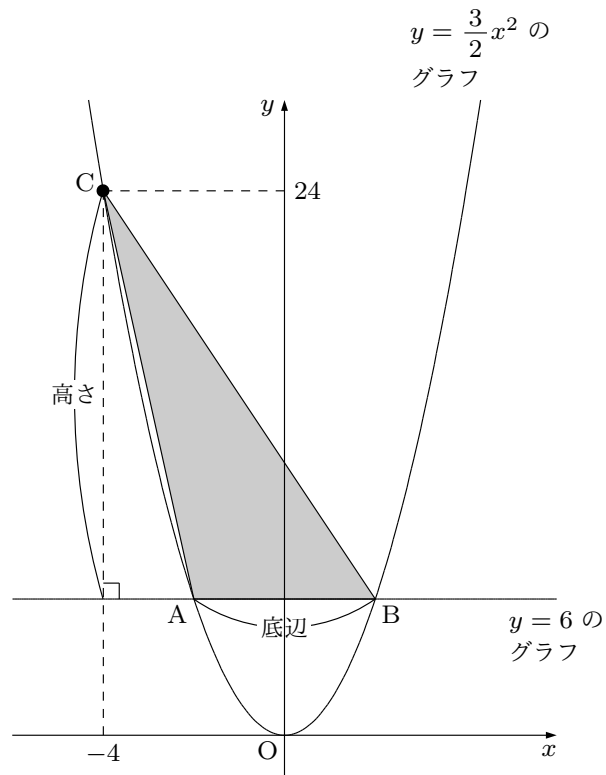
(2) 『点 C を図に打ちなさい。』という問題でしたね。(1) で C の座標は $(-4, 24)$ であることがわかりました。この点を打つとだいたい右の図のようになります。



- (3) 『A、B、C をくるとまっすぐ結ぶと $\triangle ABC$ ができます。
 $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。』
 という問題でしたね。

$\triangle ABC$ の「底辺」と「高さ」を
 右の図のように考えてみると、
 水平方向の長さや垂直方向の長さ
 だけを使って面積を求めるこ
 とができますね。

底辺の長さを知りたければ、A
 と B の x 座標がわかれば良い
 ですね。



ではまず、A の x 座標を求めてみましょう。A は関数 $y = \frac{3}{2}x^2$ のグラフ上にあります。そして A の y 座標はどう考えても 6 ですね。ということは、 $y = \frac{3}{2}x^2$ という式で y を 6 にしてみれば x の値を求めることができそうです。すると、

$$6 = \frac{3}{2}x^2$$

となります。この式から何とかして x の値を求めることができればよいわけです。

(この式ってどう見ても 2 次方程式ですね。解き方はもう大丈夫ですね。)

この式の左辺と右辺を入れかえると、

$$\frac{3}{2}x^2 = 6$$

となります。次に左辺と右辺に $\frac{2}{3}$ をかけると

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x^2 = \frac{2}{3} \times 6$$

となりますが、この式の見かけをマシにすると

$$x^2 = 4$$

となります。この式は x を 2 乗すると 4 になるという意味の式です。そこで、2 乗すると 4 になる数を探してみると -2 と 2 が見つかります。ですから

$$x = -2 \quad \text{または} \quad x = 2$$

いま、私たちは A の x 座標を求めるために、 $y = \frac{3}{2}x^2$ という式で y を 6 にして x の値を求めてきたのでした。そうすると x の値が 2 つ出てきました。では A の x 座標はどちらの値なのでしょう。図を見ればわかりますが、どう考えても A の x 座標は (2 ではなく) -2 ですよね。そして、ちょっと考えてみると、2 というのは B の x 座標ですよね。

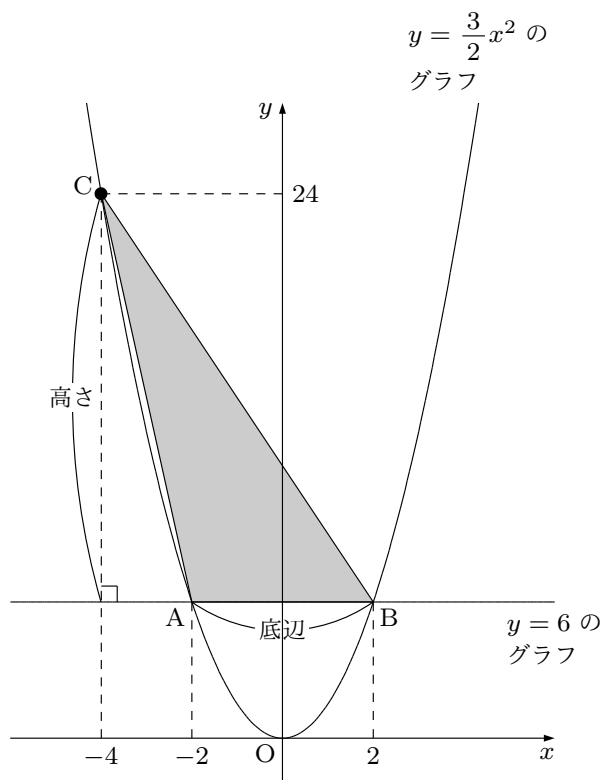
これで A の x 座標だけではなく、B の x 座標もわかりました。

では右の図を見てください。ここまでわかったことをまとめてみました。

この図を見れば、「底辺の長さ」は 4 であることがわかりますね。(A の x 座標と B の x 座標からわかるんですよ。)

また、高さは 18 であることがわかりますね。(A の y 座標と $y = 6$ という式からわかるんですよ。)

ですから、



$$\triangle ABC \text{ の面積} = \frac{1}{2} \times 4 \times 18 = 36 \text{ cm}^2$$

ということになりますね。

[本文へ戻る](#)